COURS D'ALGEBRE LINEAIRE & GEOMETRIE

Adolphe CODJIA

Licence 1, C.B.G.
11 Septembre 2014

Table des matières

INTRODUCTION

Au commencement était La Géométrie des Grecs, puis vint René Descartes qui, avec son système de repère et de coordonnées, a donné un autre aspect de la géométrie en terme d'algèbre voire d'algèbre linéaire quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate.L'algèbre est la science des équations,
cette science des équations consiste à :
1. *la recherche de l'ensemble des solutions d'équations*
(avec le constat qu'il y a stabilité de cet ensemble moyennant certaines lois de compositions internes ou externes, on a pensé au point 2.) *;*
2. *Structuration de l'ensemble des solutions d'équations, c'est-à-dire munir cet ensemble de loi de composition interne (et/ou) de loi de composition externe (moyennant un ou des ensembles structurés) avec des propriétés avérées.*
3. *Etudier les applications entre des ensembles structurés de même type avec la propriété de la transparence des structures en présence, ces applications sont appélées homomorphismes ;*
4. *Structuration de l'ensemble des homomorphismes.*
Le nom de l'algèbre est lié au nom des équations auquelles on a affaire.
Exemple : Les équations linéaires constituent les ingrédients de l'algèbre linéaire, les équations polynômiales constituent les ingrédients de l'algèbre des polynômes.
Le rôle de l'algèbre linéaire est de traiter des équations linéaires, et la structuration naturelle de l'ensemble des solutions d'équations linéaires a
une structure d'espace vectoriel.
En ce qui concerne ce cours, c'est à la fois une invitation au voyage dans les contrées de l'algèbre linéaire, et un accompagnement à la gare d'où l'on embarque pour le voyage en question. Bon voyage !

Chapitre 1

MATRICES

1.1 L'espace vectoriel des matrices de type (p, q) sur un corps K commutatif

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif.

Définition p et q étant deux entiers, $p \geq 1, q \geq 1$,
une **matrice** $p \times q$ ou de type (p, q) est, par définition, un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

à p lignes et q colonnes d'éléments $a_{ij} \in K$; l'élément a_{ij} s'appelle un terme,
ou **coefficient** de la matrice A; l'indice i correspond à la ligne, l'indice j à la colonne.

On emploie aussi la notation

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} .$$

Ceci est la $2^{ème}$ ligne : $a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2q}$; la $2^{ème}$ colonne est : $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{matrix}$.

<u>Différents types de matrices</u>

a) Matrice uniligne : $p = 1$

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{bmatrix}$.

b) Matrice unicolonne : $q = 1$, $M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$.

c) Matrice nulle de type (p, q)

C'est la matrice à p lignes et q colonne dont les composantes sont toutes nulles.

d) Matrice carrée d'ordre n

C'est une matrice à n lignes et n colonnes, les termes a_{ii} forment

la diagonale principale

e) Matrice diagonale

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Exemples :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

f) Matrice unité d'ordre n

C'est la matrice diagonale d'ordre n telle que tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1 (et les autres nuls). On la note I_n .

Exemple

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) Matrice triangulaire supérieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$

h) Matrice triangulaire inférieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \end{bmatrix}.$

i) Transposée d'une matrice :

On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$ la matrice $A' = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1\leq i \leq q \\ 1\leq j \leq p}}$ où $a'_{ij} = a_{ji}$.

La transposée de A est notée ${}^tA$; c'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et vice versa.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}; \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \\ 1+i & -8 \end{bmatrix}.$

Remarque

Soient $A, B \in M_{pq}(K)$, on a : $({}^t({}^tA)) = A$.

j) Opposée d'une matrice :

C'est la matrice obtenue en prenant l'opposée de chaque terme :

$$si\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}} \quad (-A) = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}.$$

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}}$, de type (p, q) sont **égales** si leurs coefficients a_{ij} et b_{ij} sont égaux, quels que soient $i = 1, 2, ..., p$ et $j = 1, 2, ..., q$.

1. Somme.
On définit la matrice $C = A + B$, de type (p, q) , **somme** des deux matrices de type (p, q), par ses coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq p, \ 1 \leq j \leq q$.
Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1+i \\ -3 & 1 & i \end{bmatrix}$,
$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+1 & 1-i+(-1+i) \\ -3+(-3) & -1+i+1 & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & i & 2+i \end{bmatrix}$
$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -(-1) & -(1-i) \\ -(-3) & -(-1+i) & -2 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
On a ainsi une loi de composition interne : **l'addition,** qui fait de **l'ensemble** $M_{pq}(K)$ **des matrices** $p \times q$ **un groupe commutatif.** L'élément neutre est la matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dite **matrice nulle** 0.

La matrice opposée à $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A$ de coefficients $-a_{ij}$.

Remarque
Soient $A, B \in M_{pq}(K)$, on a :
$({}^t(A + B)) = ({}^tA) + ({}^tB)$.

2.Multiplication par un scalaire. Soit $\lambda \in K$, la matrice λA est par définition, la matrice de coefficient λa_{ij}, où $A = (a_{ij})$.

C'est le produit de la matrice $A \in M_{pq}(K)$ par le scalaire λ notée λA.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1+2i & 1-i \\ -3 & -1+i & 0 \end{bmatrix}$;
$2A = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times (-1+2i) & 2(1-i) \\ 2 \times (-3) & 2(-1+i) & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2+4i & 2-2i \\ -6 & -2+2i & 0 \end{bmatrix}$.
avec les propriétes suivantes :
(i) $1.A = A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(K)$.1 étant l'élément neutre de $(K^*, \times)$.
(ii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(K)$, $\forall \alpha, \beta \in K$.
(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in K$, $\forall A, B \in M_{pq}(K)$.
(iv) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in K$, pour tout élément $A \in M_{pq}(K)$.
Ainsi l'addition qui fait de l'ensemble $M_{pq}(K)$ des matrices de type (p, q) un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe
(qui est la multiplicationon par un scalaire, d'une matrice) vérifiant les propriétés sus-mentionnées fait de $M_{pq}(K)$ un K-espace vectoriel.

Remarque
Soient $A \in M_{pq}(K)$, on a : $({}^t(\lambda A)) = \lambda({}^tA)$, $\lambda \in K$.

3. Produit de deux matrices
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(K)$ $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$,

on pose : $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{m,p}(K)$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj}$
(on dit que l'on fait li-col, c'est-à-dire ligne par colonne) est le produit de la matrice A par B, produit possible si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. En fait pour obtenir le terme c_{ij} de la matrice $A \times B = AB$, on multiplie les composantes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par celles de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B dans l'ordre et on fait la somme des différents produits.

On a symboliquement du point de vu des types de matrices

$$(m, n)(n, p) = (m, p).$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$;

$$A \times B = AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\times 3+3\times 1 & -1\times(-1)+3\times(-3) & -1\times 2+3\times 4 & -1\times 1+3\times 7 \\ -4\times 3+1\times 1 & -4\times(-1)+1\times(-3) & -4\times 2+1\times 4 & -4\times 1+1\times 7 \\ 0\times 3+2\times 1 & 0\times(-1)+2\times(-3) & 0\times 2+2\times 4 & 0\times 1+2\times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & 20 \\ -11 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

$B \times A$ n'est pas un produit possible car le nombre de colonnes de B égalant 4 n'est pas égal au nombre de lignes de A qui est 3.

Propriétés

1. $A(B+C) = AB + AC,\ \forall A \in M_{m,n}(K),\ \forall B, C \in M_{n,p}(K)$.
2. $(A+B)C = AC + BC,\ \forall A, B \in M_{m,n}(K), \forall C \in M_{n,p}(K)$.
3. $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K)$,
$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
4. $\forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K), \forall C \in M_{p,r}(K)$,
$(AB)C = A(BC) = ABC$.
5. $({}^t(AB)) = ({}^tB)({}^tA), \forall A \in M_{p,n}(K),\ \forall B, \in M_{n,p}(K)$.
6. $I_p.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{p,n}(K)$, I_P, I_n sont unitées d'ordre resp. p, n.

Définition

Soit $A \in M_{pq}(K)$. On appelle *opérations élémentaires* sur A l'une des transformations suivantes :

1. Ajouter à une colonne(resp. ligne) de A le produit par un élément de K^* d'une **autre** colonne(resp. ligne) : on parle de **transvection** sur les colonnes (resp. lignes) de A.
2. Permuter les colonnes(resp. lignes) de A.
3. Multiplier une colonne(resp. ligne) de A par un élément de K^* : on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.

Définition

Etant donné $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n (nombre de lignes = nombre de colonnes=n), on définit une application tr de $M_n(K)$ sur K nommée **trace** telle que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

$M_n(K)$ est l'ensemble des matrices de type (n, n), dites aussi matrices carrée d'ordre n.

Remarque

$(M_n(K), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif .
L'élément unité se note I_n .

Définition

$A \in M_n(K)$ est dite **inversible** s'il existe $B \in M_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$.
B est appelée **l'inverse** de A et se note $B = A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.

Proposition

L'ensemble $M_{pq}(K)$ des matrices $p \times q$ est un espace vectoriel sur K,
(ce terme sera défini plus tard) *par rapport aux deux opérations sus-mentionnées.*
La dimension de $M_{pq}(K)$ sur K est pq;une base est constituée par les matrices E_{ij} tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$, si $r \neq i$ ou $s \neq j$. Ceux sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(K)$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(K)$, alors $A = \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$.

Exemples. a°) Une base de l'espace vectoriel $M_{23}(\mathbb{R})$ est constitué par les matrices :

$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{23}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$A = 2E_{11} + 5E_{12} - 7E_{13} + 9E_{21} + 8E_{22} + 4E_{23}.$$

b°) Une matrice $1 \times q$ a la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{pmatrix}$.
on l'appelle **matrice ligne ou uniligne** l'espace $M_{1q}(K)$ est isomorphe à K^q.

c°) Une matrice $p \times 1$ a la forme $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.

On l'appelle **matrice colonne ou unicolonne**; l'espace $M_{p1}(K)$ est isomorphe à K^p.

d°) Une matrice $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre** n; l'espace vectoriel de ces matrices est notée $\mathrm{M}_n(K)$; il est de dimension n^2 sur K.

e) Deux matrices $A, B \in M_n(K)$, on a $tr(AB) = tr(BA)$.
Il s'agit de l'application trace sur $M_n(K)$.

f) Deux matrices $A, B \in M_{pq}(K)$ sont semblables s'ils existent $P \in M_p(K)$ inversible et $Q \in M_q(K)$ inversible telle que $A = PBQ$.

g) Deux matrices $A, B \in M_n(K)$ sont semblables s'il existe $P \in M_n(K)$ inversible telle que $A = P^{-1}BP$. Alors $tr(A) = tr(B)$.

Proposition

Etant donnée une matrice $A \in M_{pq}(K)$, à l'aide des opérations élémentaires sur A, A sera semblable à une matrice de la forme suivante : $R = \begin{bmatrix} I_r & R_{r(q-r)} \\ 0_{(p-r)r} & 0_{(p-r)(q-r)} \end{bmatrix}$

où $r \leq \inf(p, q)$, I_r est la matrice unité d'ordre r et 0_{st} est la matrice identiquement nulle avec s lignes et t colonnes.

On appelle l'entier r le rang de la matrice A et se note $rg(A) = r = rg({}^tA)$.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, recherchons le rang de A.

Nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de A en augmentant A de la matrice identité de même nombre de lignes que A.
Et on fait les opérations élémentaires sur la matrice augmentée.
Ainsi d'entée, on a :

$$\left[\underbrace{\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}}_{A}\left|\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3}\right.\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{R'}\left|\underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{array}}_{P}\right.\right] \quad \frac{1}{2}L_2 \ .$$

On constatera que $PA = R'$.
On continue les opérations élémentaires sur les colonnes cette fois-ci, en augmentant R' en bas de sa troisième ligne par la matrice identité de même nombre de colonnes que R', c'est-à-dire :

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \text{C}_3\text{-2C}_1 \quad \text{C}_4\text{-3C}_1 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{C}_3\text{+3C}_2 \quad \text{C}_4\text{+4C}_2 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Ici on a : $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et on pose $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On constate que $PAQ = R$,et que P et Q sont des matrices carrées inversibles d'ordre respectif 3 et 4 ainsi A est semblables à R et le rang de A est 2.

Proposition

a) Toute opération élémentaire transforme une matrice A en une matrice de même rang que A.

b) Deux matrices semblables, ont le même rang.

Définition

Deux matrices non carrées semblables **, sont dites équivalentes** aussi.

Proposition

Deux matrices sont **équivalentes ssi** elles ont le même rang.

Rémarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

Le rang de $A =$ le rang de $B = 1$, mais elles ne sont pas semblables car $tr\,(A) = 0 \neq 1 = tr\,(B)$, alors que si elles étaient semblables, elles devraient avoir la même trace.

Chapitre 2

DÉTERMINANTS

Le déterminant est un simple **scalaire**(nombre) calculé à partir des éléments d'une matrice **carrée**. Ce scalaire est nul si la matrice carrée en question est non inversible.

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On appelle **déterminant de A** le nombre **ad − bc**.

On note **dét A** ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -14$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de A le nombre

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

On note $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3

Par la méthode de Sarrus

On complète par les deux premières colonnes à droite
(ou par les deux premières lignes en bas) et on fait les produits 3 à 3 ceux parallèles à la diagonale principale sont comptés positivement et les autres perpendiculaires à la diagonale principale sont comptés négativement.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Remarque : La méthode de Sarrus ne s'applique qu'au déterminant d'ordre 3.

Méthode par le développement suivant une ligne ou une colonne.

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ le déterminant de A s'obtient par développement suivant la première ligne $a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$, en multipliant chaque a_{ij} par $(-1)^{i+j}$ et par le déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne de a_{ij} et en faisant la somme des différents produits :

Quand on élimine la ligne et la colonne de a_{11} il reste $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{12} il reste $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$;

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{13} il reste $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Ainsi de suite.

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) . \end{aligned}$$

Le déterminant s'obtient aussi par le développement suivant une colonne, développons $\det A$ suivant la $2^{ième}$ colonne de A $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+2} a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} a_{32} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) . \end{aligned}$$

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ développons suivant la $2^{ème}$ ligne.

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3 (-2 \times 5 - 4 \times 3) - 1 \times (-1 \times 4 - (-1) \times (-2)) \\ &= -3 (-22) - (-6) = 72. \end{aligned}$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ ligne :

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \times (-5) \times \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -5 \times (-4 \times (-2) - (-1) \times 2) = -50.$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{1+2} \times (-4) \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(-4) \times (0 \times 0 - (-2) \times (-5)) + 2\,(0 \times 2 - (-1) \times (-5))$$
$$= -40 - 10 = -50.$$

2.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordre inférieur à n en développons suivant une ligne ou une colonne.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$, développons suivant la $4^{ème}$ colonne :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \times 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \left[2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right]$$
$$= 4\,[2\,(1-8) - 5\,(1+6)] = 4\,(-14-35)$$
$$= 4\,(-49) = -196.$$

Remarque

Pour développer suivant les lignes ou les colonnes, il vaut mieux choisir celles qui renferment le plus de zéros pour réduire le nombre de calculs.

4) Propriétés des déterminants

1) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Alors on a :
$\det(AB) = \det A \times \det B$. $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K)$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

2) Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier celui d'une matrice diagonale, est égal au produit des éléments diagonaux (c'est-à-dire des éléments de la diagonale principale).

3) Le déterminant d'une matrice unité est égale à 1.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-2) = -6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) \times (-5) = 30.$$

4) Le déterminant ne change pas quand on **ajoute** à une *ligne* une combinaison des **autres** *lignes* ; en particulier, on peut remplacer une ligne par la somme de toutes les lignes ou encore ajouter à une ligne λ multiplié par une autre ligne où λ est un scalaire.

(Dans la propriété 4) en remplacant ligne(s) par colonne(s), on a le même résultat).

Exemple

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, en ajoutant à la $3^{ème}$ ligne, deux fois la $1^{ère}$ ligne, on a :

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$, je développe par rapport à la $2^{ème}$ colonne,

$$\det A = -(-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2(33+3) = 72.$$

Remarque

Il est plus intéressant de faire des manipulations (légitimes) qui font apparaître des zéros dans le déterminant afin d'en faciliter le calculer(voir supra).

5) Le déterminant d'une matrice dont une ligne ou une colonne est formée de zéros est un déterminant nul. Le déterminant d'une matrice dont une ligne(resp. une colonne) est une combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes) est un déterminant nul.

Exemple

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, car la $2^{ème}$ colonne est égale à deux fois la $1^{ère}$ colonne.

6) Lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes) dans un déterminant le déterminant est changé en son opposé.

7) Soient $M \in M_r\ (K)$, $N \in M_{rs}(K)$ et $P \in M_s\ (K)$ alors $\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & P \end{vmatrix} = |M|\,|P|$.

8) Soient $A_i \in M_{r_i}\ (K)$ où $1 \leq i \leq n$, alors $\begin{vmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

9) Si deux matrices $A,\ B \in M_n(K)$ sont semblables, alors $\forall m \in K, \forall k \in \mathbb{N}^*, rang\,(A + mI_n)^k = rang\,(B + mI_n)^k$, $\det (A + mI_n)^k = \det (B + mI_n)^k$ et

$trace\,(A+mI_n)^k = trace\,(B+mI_n)^k.$

10) Soit $A \in M_n(K)$, $\det(A) = \det({}^tA)$.

Rémarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

On a le rang de A = au rang de B= 1, $\det(A) = \det(B) = 0$,
$tr\,(A) = tr\,(B) = 0$, mais A et B ne sont pas semblables car

$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, on a alors

$PAQ = B$, comme A et B sont des matrices carrées, elles seraient semblables si $P^{-1} = Q$, alors qu'avec

$P \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times P = I_2$, on a

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \neq Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donc on peut conclure

que A et A ne sont pas semblables, alors qu'elles ont le même rang, le même déterminant, et la même trace.

En résumé : Avoir le même rang , le même déterminant, et la même trace, pour des matrices carrés de même ordre, sont des conditions nécessaires pour qu'elles soient semblables, mais pas suffisantes.

2.4 Inverse d'une matrice carrée

1) Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice (carrée d'ordre n)
B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
B est alors appelée **inverse** de la matrice A.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. On vérifie que pour $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$,
on a : $AB = BA = I_2$.

Donc A est inversible et B est inverse de la matrice A.

2 Théorème

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Si A est inversible, son inverse est unique. On la note A^{-1} et on a : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$ donc A est inversible.

Propriétés de la matrice inverse

Si A et B sont inversibles de même ordre, on a :

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}.A^{-1}$, où $\lambda \in K$.
3. $({}^t(A^{-1})) = ({}^t(A))^{-1}$

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Exercice
Montrer que :
1. $A\left(I_n + A\right)^{-1} = \left(I_n + A\right)^{-1} A$, Si $\left(I_n + A\right)$ est inversible avec $A \in M_n\left(K\right)$.
2. $A\left(I_n + A\right)^{-1} + \left(I_n + A\right)^{-1} = I_n$, Si $\left(I_n + A\right)$ est inversible avec $A \in M_n\left(K\right)$.
3. $A\left(I_n + BA\right)^{-1} = \left(I_m + AB\right)^{-1} A$, si $A \in M_{mn}\left(K\right)$ et $B \in M_{nm}\left(K\right)$ avec $\left(I_n + BA\right)$ et $\left(I_m + AB\right)$ sont inversibles.
4. En déduire que : $\left(I_m + AB\right)^{-1} + A\left(I_n + BA\right)^{-1} B = I_m$.

Proposition de réponse.
1. $\left(I_n + A\right)\left(I_n + A\right)^{-1} = I_n \Longrightarrow A\left(I_n + A\right)\left(I_n + A\right)^{-1} = A.I_n = A \Longrightarrow$
$\left(A + A^2\right)\left(I_n + A\right)^{-1} = A \Longleftrightarrow \left(I_n + A\right) A\left(I_n + A\right)^{-1} = A \Longleftrightarrow$
$\left(I_n + A\right)^{-1}\left(I_n + A\right) A\left(I_n + A\right)^{-1} = \left(I_n + A\right)^{-1} A \Longleftrightarrow$
$I_n.A\left(I_n + A\right)^{-1} = \left(I_n + A\right)^{-1} A \Longleftrightarrow A\left(I_n + A\right)^{-1} = \left(I_n + A\right)^{-1} A$.
2. Evaluons : $\left(I_n + A\right)^{-1} + \left(I_n + A\right)^{-1} A = \left(I_n + A\right)^{-1}\left(I_n + A\right) = I_n$.
3. $\left(I_n + BA\right)\left(I_n + BA\right)^{-1} = I_n \Longrightarrow A\left(I_n + BA\right)\left(I_n + BA\right)^{-1} = A.I_n = A$
$\Longleftrightarrow \left(A.I_n + A\left(BA\right)\right)\left(I_n + BA\right)^{-1} = A \Longleftrightarrow \left(I_m.A + \left(AB\right) A\right)\left(I_n + BA\right)^{-1} = A$
$\Longleftrightarrow \left(I_m + AB\right) A\left(I_n + BA\right)^{-1} = A \Longleftrightarrow$
$\left(I_m + AB\right)^{-1}\left(I_m + AB\right) A\left(I_n + BA\right)^{-1} = \left(I_m + AB\right)^{-1} A \Longleftrightarrow$
$\left(I_m A\right)\left(I_n + BA\right)^{-1} = \left(I_m + AB\right)^{-1} A \Longleftrightarrow A\left(I_n + BA\right)^{-1} = \left(I_m + AB\right)^{-1} A$.
4. Evaluons $\left(I_m + AB\right)^{-1} + A\left(I_n + BA\right)^{-1} B = \left(I_m + AB\right)^{-1} + \left(I_m + AB\right)^{-1} AB$ d'après la question 3. De là, on a :

$$\begin{aligned}\left(I_m + AB\right)^{-1} + A\left(I_n + BA\right)^{-1} B &= \left(I_m + AB\right)^{-1} + \left(I_m + AB\right)^{-1} AB \\ &= \left(I_m + AB\right)^{-1}\left(I_m + AB\right) = I_m.\end{aligned}$$

2.4.1 Comatrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij}
le nombre $C_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} X_{ij}$
où X_{ij} est le déterminant obtenu en éliminant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.
La matrice des cofacteurs de A est la matrice notée
$com\left(A\right) = \left(\left(-1\right)^{i+j} X_{ij}\right)_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n} = \left(C_{ij}\right)_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$.
appelée la **comatrice** de A. le determinant extrait X_{ij} est appelé le mineur de a_{ij}.

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On constate que $\forall 1 \leq i,\ j \leq n$, $C_{ij} = X_{ij}$ si $(i + J)$ est pair et $C_{ij} = -X_{ij}$ si $(i + j)$ est impair.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq\ i,\ j\ \leq\ 3}$.

Le cofacteur de $a_{11} = 1$ est $(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 9$, on a $X_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Le cofacteur de $a_{32} = -5$ est $(-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, on a $X_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Ainsi de suite.

La comatrice de A est donc $comA = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

D'après le calcul du déterminant par le développement suivant une ligne où une colonne, on a :

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq\ i,\ j\ \leq\ n}$.

Déterminant de A développé par rapport à la i-ième ligne :

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$.

Déterminant de A développé par rapport à la j-ième colonne :

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$.

2.4.2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Par la méthode des cofacteurs

En reprenant la formule du déterminant de A développé par rapport à la i-ième ligne : $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$.

Remplaçons les a_{ij}, $\forall 1 \leq j \leq n$, par ceux d'une autre ligne, disons la k-ième ligne, avec $k \neq i$, nous obtenons :

$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in} = 0$, car A' n'est rien d'autre que la matrice A dans laquelle la i-ième ligne est remplacer par la k-ième ligne, avec $k \neq i$, donc A' a deux lignes identiques : la i-ième ligne et la k-ième ligne, avec $k \neq i$, ainsi $\det(A')$ développé suivant la i-ième ligne est :

$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in}$ et est égal à 0, car dans $\det(A')$, il y a deux lignes identiques.

En résumé, on a : $a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} det(A) \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$.

Considérons la matrice des cofacteurs $com\,(A) = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$.

Evaluons $A.\left({}^tC\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I_n.$$

car dans le produit $A.\left({}^tC\right)$, l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est :

$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + ... + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} det\,(A) \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

On a $\left({}^tC\right).A = A.\left({}^tC\right) = \det(A)\, I_n$.

Proposition

Pour tout $A \in M_n(K)$, on a :

$(\det A).I_n = A.com\left({}^tA\right) = com\left({}^tA\right).A = A\left({}^tcomA\right) = \left({}^tcomA\right).A$

car $\left({}^tcomA\right) = com\left({}^tA\right)$.

Théorème

Si A est une matrice inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\left({}^tA\right) = \dfrac{1}{\det A} \times \left({}^tcom\,(A)\right)$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A, $com\left({}^tA\right)$ désigne la comatrice de la transposée de A et $\left({}^tcom\,(A)\right)$ désigne la transposée de la comatrice de A.

Définition

Pour tout $A \in M_n(K)$, la matrice $\left({}^tcomA\right) = com\left({}^tA\right)$ s'appelle la matrice **adjointe** de A.

Remarque

Soit une matrice inversible A, son inverse est notée $A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, A est -elle inversible ?

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$, à la $1^{ère}$ colonne, j'ai fait la $1^{ère}$ colonne plus la $3^{ème}$ colonne afin d'avoir plus de zéro dans mon déterminant pour ne pas avoir beaucoup de termes à développer. Comme $\det A = 2 \neq 0$, alors A est inversible.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\left({}^tA\right) = \dfrac{1}{\det A} \times \left({}^tcom\,(A)\right)$.

${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$,

$$com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = ({}^tcom\,(A)).$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.5 Rang d'une matrice

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ n \\ 1\leq\ j\ \leq\ m}}$. On a $rgA \leq \min(n, m)$.
Si $m = n$, et que $rgA = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.
Proposition
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ n \\ 1\leq\ j\ \leq\ m}}$ alors rgA est le plus grand entier naturel s
qui est tel qu'on puisse extraire de A une matrice d'ordre s de déterminant $\neq 0$
(avec permutation des colonnes de A si necessaire).
Exemple
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ comme $2 \geq\ rgA$,donc $rgA = 2$.
Corollaire
$rg\,({}^tA) = rgA$.

Chapitre 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTEME LINÉAIRE

Définition
De maniére générale, on appelle équation linéaire dans les variables x_1 ; ... ; x_n toute relation de la forme
$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ (E)
où a_1; ... ; a_n et b sont des nombres réels.
Il importe d'insister ici que ces équations linéaires sont implicites, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les variables, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre les variables.
Résoudre une équation signifie donc la rendre explicite, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les variables peuvent prendre.
Une solution de l'équation linéaire (E) est un n-uple s_1 ;.... ; s_n de valeurs des variables x_1 ; ... ; x_n qui satisfont à l'équation (E). Autrement dit
$a_1s_1 + ... + a_ns_n = b$
Définition
Un ensemble fini d'équations linéaires dans les variables x_1 ; ... ; x_n s'appelle un système d'équations linéaires.
Exemple
Le système
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$
admet comme solution
$x_1 = -18$; $x_2 = -6$; $x_3 = 1$.
Par contre
$x_1 = 7$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$
ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.
Définition
Un système d'équations est dit incompatible ou inconsistant s'il n'admet pas de solutions.
Exemple
Le système linéaire
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$
est clairement incompatible.
Définition

Soient $n, m \geq 1$.
On appelle système de m équations à n inconnues tout système (S) de la forme

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 & +\ldots+a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & +a_{22}\,x_2 & +\ldots+a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & +a_{m2}\,x_2 & +\ldots+a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. ,$$

où a_{ij} , b_i sont des scalaires donnés. x_1 , x_2 , ..., x_n sont des inconnues.
La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1\leq j \leq n}}$ = la matrice de (S) . Les $(b_i)_{1\leq i \leq m}$ sont les seconds membres de (S) , et (S) est dit *homogène* si $b_i = 0 \; \forall 1 \leq i \leq m$.

Ecriture matricielle de (S).

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B$.

3.1 Résolution du système (S)

Je rappelle le système

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 & +\ldots+a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & +a_{22}\,x_2 & +\ldots+a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & +a_{m2}\,x_2 & +\ldots+\mathrm{a}_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Définition

Nous obtenons la matrice augmentée associée au système en «oubliant» les variables x_i et les signes «+» et «=». La matrice augmentée associée au système (S) est alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{array}\right.$$

Sa matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix}.$$

3.2 Résolution avec la matrice augmentée

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.
Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires :
(1) multiplier une équation par une constante non nulle;
(2) permuter deux équations;

(3) ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.
Les opérations (1), (2) et (3) ne changent pas l'ensemble des solutions.
Elles correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée.
Ces opérations sont les suivantes :
(1) multiplier une ligne par une constante non nulle ;
(2) permuter deux lignes ;
(3) ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.
Exemple
Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix}$$

puis faisons les opérations élémentaires nécessaires sur le système et sur la matrice augmentée.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 \ = 2 \\ x_2 \ = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Nous remarquons que les opérations élémentaires peuvent être faites uniquement sur la matrice augmentée pour revenir à la fin au système d'équations. C'est ce que nous avons fait.
On obtient ainsi l'unique solution su système : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -1$.
Définition
Le système (S) est dit de Cramer si $m = n$ et si $\det A \neq 0$.
Tout système de Cramer (S) admet une solution unique $X = A^{-1}B$.

3.2.1 Système quelconque

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1\leq j \leq n}}$, la matrice de (S), et soit $r = rgA$.
1^{er} cas : $m = r < n$,
$(S) \Longleftrightarrow (S') \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1r}\,x_r & = & \underbrace{b_1 - (a_{1r+1}\,x_{r+1} + a_{1r+2}\,x_{r+2} + ... + a_{1n}\,x_n)}_{c_1\ (x_{r+1},\,x_{r+2},\,...,\,x_n)} \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + ... + a_{2r}\,x_r & = & \underbrace{b_2 - (a_{2r+1}\,x_{r+1} + a_{2r+2}\,x_{r+2} + ... + a_{2n}\,x_n)}_{c_2\ (x_{r+1},\,x_{r+2},\,...,\,x_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + ... + a_{mr}\,x_r & = & \underbrace{b_m - (a_{mr+1}\,x_{r+1} + a_{mr+2}\,x_{r+2} + ... + a_{mn}\,x_n)}_{c_m\ (x_{r+1},\,x_{r+2},\,...,\,x_n)} \end{cases}$$

Soit $A' = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ r}$ avec $r = rgA'$ donc $\det A' \neq 0$
$(s\ ')$ est un système de Cramer qu'on doit résoudre avec les $(x_{r+i})_{1\leq\ i\ \leq(n-r)}$ comme inconnues secondaires(c'est-à-dire des paramètres).
$2^{ème}$ cas : $r < m$ (voir système échelonné à la suite).
Définition*(rappel)*
On appelle opérations élémentaires dans un système ;
les opérations de l'une des formes suivantes :
a) Echanger deux lignes du système.
b) Multiplier une ligne par une constante non nulle.
c) Rajouter à une ligne du système un multiple d'une autre ligne du système.
(une ligne ici est une équation du système)
Remarque
Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent.
On peut donc transformer un système linéaire par une succession d'opérations élémentaires en un système échelonné.

3.2.2 Systèmes échelonnés

On dit qu'un système est échelonné si et seulement si tous les coefficients figurant au-dessous de la diagonale sont nuls. Cela revient à dire que $\forall i > j,\ \ a_{ij}\ = 0$.
Autant dire qu'un système échelonné se présente sous l'une des trois formes suivantes :
(a) Si $m = n$
(un tel système est dit carré et l'on dit d'un système carré échelonné qu'il est trigonal).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dans ce premier cas il est facile de résoudre le système lorsque tous les termes diagonaux sont non nuls. on utilise l'*algorithme de la remontée* :
la dernière équation donne en effet la valeur $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$,
puis l'avant-dernière ligne donne la valeur
$x_{n-1}\ = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1}\ - a_{(n-1)n}\ x_n\right)$ et, plus généralement,
on obtient : $x_k\ = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k\ - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\ \ x_j\right)$,
ce qui permet de calculer les x_k successifs par ordre décroissant de l'indice k.
Le système admet une unique solution, et cela quel que puisse être le second membre.
Un système ayant cette propriété s'appelle un *système de Cramer*.
Si, au cours de cet algorithme, on trouve un coefficient diagonal nul dans une ligne, par exemple la ligne k, alors on ne peut pas trouver la valeur de x_k .
La ligne correspondante introduit une *condition de compatibilité*.
Si cette condition n'est pas vérifiée, le système n'admet pas de solutions ;
si au contraire cette condition est vérifiée, toute solution de x_k convient et l'on peut poursuivre l'algorithme. Il y a alors une infinité de solutions, paramétrées par la valeur de x_k .
Cette situation peut d'ailleurs se rencontrer plusieurs fois au cours de la remontée,

induisant une discussion plus approfondie. On voit par là l'intérêt des systèmes triangulaires dont les coefficients diagonaux sont non nuls.
(b) Si $m < n$: on a :

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{mm}x_m & = b_m \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, on fixe arbitrairement les valeurs des variables x_{m+1} à x_n .
On est alors ramené au cas précédent, simple à résoudre lorsque tous les coefficients diagonaux sont non nuls, nécessitant une discussion sinon.
(c) Si $m > n$:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \\ & & 0 & = b_{n+1} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & = b_m \end{array}\right. .$$

Dans ce cas les dernières lignes donnent directement des conditions de compatibilité. Lorsqu'elles sont vérifiées, on se ramène au cas ci-dessus. D'où, là encore, l'intérêt de l'obtention de coefficients diagonaux non nuls.

3.3 Méthode de résolution d'un système de Cramer par les déterminants

Soit $(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} a_{11}\,x_1\ + a_{12}\,x_2\ + ... + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1\ + a_{22}\,x_2\ + ... + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\,x_1\ + a_{n2}\,x_2\ + ... + a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array}\right.$,
un système de n équations à n inconnues de Cramer.
On appelle déterminant du système (Σ) le nombre $\Delta = \det A$, où A est la matrice associée a (Σ).
On appelle déterminant de x_i le nombre Δ_{x_i} égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{ème}$ colonne par les éléments respectifs des seconds membres c'est-à-dire b_1 , b_2 , ..., b_n .
Théorème
(Σ) étant de Cramer, l'unique solutin dans $\mathbb{k}^n$ est : $\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; ....; \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}\right)$.
Exemple

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x - 2y + z & = & 3 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ -x - y + z & = & 0 \end{array}\right. .$$

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \text{ (je rappelle que j'ai fait } \mathrm{col}_3 + \mathrm{col}_2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\,;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6\,;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{3}\,;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{3}\,;\ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}$. Maintenant voyant que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

on a bien $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$.

3.3.1 Méthode du pivot

La méthode du pivot est une organisation des calculs permettant de construire un système linéaire échelonné en pratiquant des opérations élémentaires à partir d'un système donné. On procède en annulant, colonne après colonne, tous les termes situés sous la diagonale.

3.4 Calcul de l'inverse d'une matrice

Par la résolution de systèmes

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq\ i,\ j\ \leq\ n}$ une matrice inversible, $B = (x_{ij})_{1 \leq\ i,\ j\ \leq\ n}$ son inverse, alors $AB = I_n$.

Pour trouver la $1^{ère}$ colonne de B, on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la $j^{ème}$ colonne de B,on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ x_{(j+1)j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{seule la } j^{ème} \text{ coordonnée est égale à 1.}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Réponse

$\det A = 3\,;\qquad$ soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};\qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$

$$AX = Y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 - x_2 & = & y_2 \\ x_1 - x_3 & = & y_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & = & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 & = & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

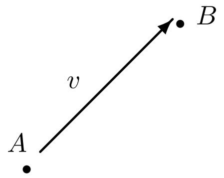
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Chapitre 4

Calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace

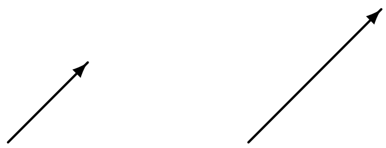
4.1 Définitions et règles de calcul

Un vecteur est un segment orienté dans le plan ou dans l'espace de dimension 3.



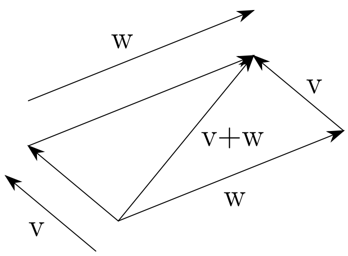
$$v = \overrightarrow{AB}$$

On appelle *module du vecteur* la longueur du segment AB. Le *support du vecteur* v est par définition la droite passant par A et B.
Deux vecteurs ont la *même direction* si leurs supports sont parallèles Deux vecteurs ayant la même direction ont le *même sens* s'ils sont orientés de la même façon :



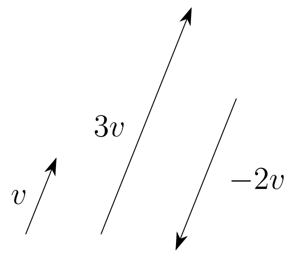
Deux vecteurs sont dits équivalents si l'on peut les superposer par une translation. Par la suite, deux vecteurs équivalents seront considérés comme égaux. Un vecteur est ainsi déterminé par son module, sa direction et son sens.

Dans le calcul vectoriel, on pourra donc faire des translations sans changer le vecteur. On définit *la somme de deux vecteurs* v et w par la règle du parallelogramme :



On place l'origine de w sur l'extrémité de v. Le vecteur $v+w$ est alors le segment orienté joignant l'origine de v à l'extrémité de w. Remarquons que $v+w=w+v$.
Le *produit d'un vecteur v par un scalaire k* est le vecteur kv défini par les propriétés suivantes :
– son module est égal à $|k|$ fois le module de v
– sa direction est celle de v
– son sens est celui de v si $k>0$ et le sens opposé si $k<0$.

Exemple 4.1.



L'opposé du vecteur v est le vecteur $-v$ et la *différence de deux vecteurs v et w* est définie par $v-w=v+(-w)$.

4.1.1 Systèmes de coordonnées

Si l'on choisit un système de coordonnées pour le plan (resp. pour l'espace), un vecteur peut alors s'écrire en composantes :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(resp. } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{)}$$

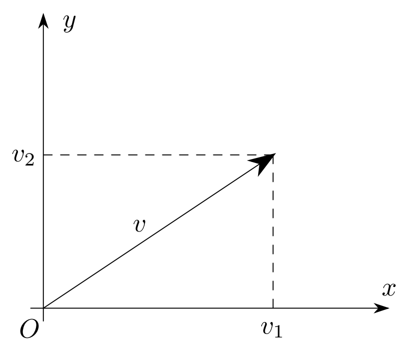


Figure 6.2

Dans cette représentation, l'origine du vecteur est toujours le point $O=(0,0)$, intersection des axes de coordonnées x et y.
Dans le cas de l'espace à 3 dimensions, on choisit toujours un système d'axes orienté positivement comme le montre la figure ci-dessous :
La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un scalaire se calculent comme suit (nous donnons les formules pour des vecteurs de l'espace, le cas du plan étant similaire) :
Si $v=(v_1,\, v_2,\, v_3)$ et $w=(w_1,\, w_2,\, w_3)$ alors

$$v+w=(v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3),$$

$$kv=(kv_1,\, kv_2,\, kv_3)$$

et

$$-v=(-v_1,\, -v_2,\, -v_3).$$

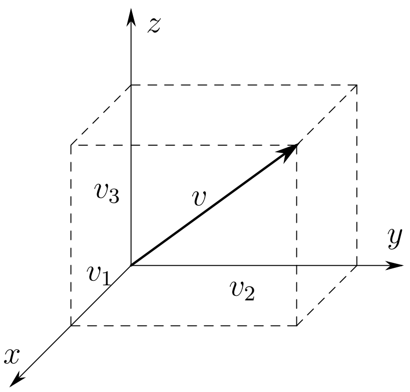


Figure 6.4 : $v = (v_1,\, v_2\, v_3)$.

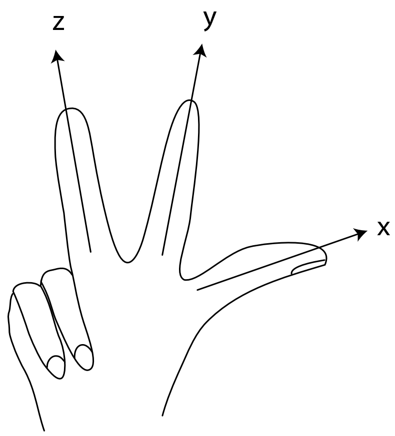


Figure 6.5 : (x, y, z) a l'orientation positive.

4.1.2 Propriétés du calcul vectoriel

Théorème 4.2. *(a)* $u + v = v + u$

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(c) $u + O = O + u = u$

(d) $u + (-u) = 0$

(e) $k(\ell u) = (k\ell)u$

(f) $k(u + v) = ku + kv$

(g) $(k + \ell)u = ku + \ell n$

Soit v un vecteur. On note $\| v \|$ son module. C'e st un nombre positif ou nul qui est aussi appelé la norme de v. Si $u = (u_1, u_2)$ alors

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

et, de même, si $u = (u_1, u_2, u_3)$ alors

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Ceci découle du théorème de Pythagore.
Un vecteur de norme 1 est appelé *vecteur unité*.

4.2 Le produit scalaire

On va définir le produit scalaire de deux vecteurs u et v dans le plan ou dans l'espace de dimension 3. Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire. Soient $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux vecteurs dans le plan. On définit le produit scalaire par

$$u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \,.$$

Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs dans l'espace de dimension 3. On définit le produit scalaire par

$$u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Le produit scalaire a les propriétés suivantes :

Théorème 4.3. *(1)* $u \bullet v = v \bullet u$

(2) $\lambda u \bullet v = \lambda(u \bullet v)$

(3) $(u + v) \bullet w = u \bullet w + v \bullet w$

(4) $u \bullet u \geq 0$

(5) $u \bullet u = 0$ *si et seulement si* $u = 0$.

(6) $u \bullet u = \| u \|^2$

Démonstration : Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition. Par exemple, si $u = (u_1, u_2)$ alors

$$u \bullet u = u_1^2 + u_2^2.$$

Mais

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

et donc

$$u \bullet u = \| u \|^2,$$

ce qui démontre (6). □

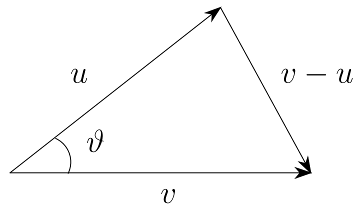


Figure 6.8

Théorème 4.4.
$$u \bullet v = \parallel u \parallel \cdot \parallel v \parallel \cdot \cos(\theta)$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \parallel v-u \parallel^2 &= (v-u)\bullet(v-u) \\ &= v\bullet v + u\bullet u - 2u\bullet v \\ &= \parallel v \parallel^2 + \parallel u \parallel^2 - 2u\bullet v\,. \end{aligned}$$

Par le théorème du cosinus, on a :

$$\parallel v-u \parallel^2 = \parallel v \parallel^2 + \parallel u \parallel^2 - 2 \parallel u \parallel \parallel v \parallel \; \cos(\theta)\,.$$

Donc
$$u \bullet v = \parallel u \parallel \parallel v \parallel \; \cos(\theta)\,.$$

Ceci démontre le théorème. □

Théorème 4.5. *u et v sont orthogonaux si et seulement si*

$$u \bullet v = 0\,.$$

Démonstration : Comme
$$u \bullet v = \parallel u \parallel \cdot \parallel v \parallel \cdot \cos(\theta)\,.$$

on a $u \bullet v = 0$ si et seulement si $\cos(\theta) = 0$ et donc si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et donc si et seulement si u et v sont orthogonaux. □

4.2.1 Projection orthogonale

La projection (orthogonale) de u sur v est notée

$$\mathrm{proj}_v\, u.$$

Le théorème suivant nous donne le lien entre la projection et le produit scalaire :

Théorème 4.6.
$$proj_v\, u = \frac{u \bullet v}{\parallel v \parallel^2} v$$

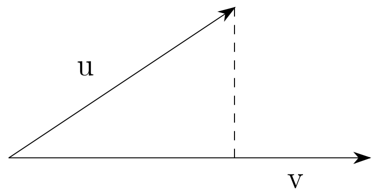


Figure 6.9

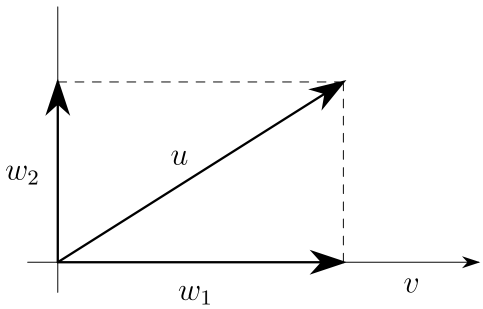


Figure 6.10

DÉMONSTRATION :
Posons $w_1 = \text{proj}_v\, u$. Comme w_1 est parallèle v, on peut l'écrire

$$w_1 = \ell v$$

pour un certain scalaire ℓ. On a :

$$u = w_1 + w_2\,.$$

Calculons le produit scalaire avec v. On a :

$$\begin{aligned} u \bullet v &= (w_1 + w_2) \bullet v = \\ &= w_1 \bullet v + w_2 \bullet v\,. \end{aligned}$$

Mais $w_2 \bullet v = 0$, car w_2 et v sont orthogonaux. Il reste alors

$$\begin{aligned} u \bullet v &= w_1 \bullet v = (\ell v) \bullet v = \\ &= \ell\, v \bullet v = \ell\ \| v \|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\ell = \frac{u \bullet v}{\| v \|^2}.$$

On a donc

$$\text{proj}_v\, u = \frac{u \bullet v}{\| v \|^2}\, v.$$

□

Théorème 4.7. *Soit θ l'angle formé par les vecteurs u et v. Alors*

$$\| \mathit{proj}_v\, u \| = \| u \| \cdot |\cos(\theta)|\ .$$

Démonstration : Par les théorèmes 4.6 et 4.4, on a

$$\begin{aligned} \| \operatorname{proj}_v u \| &= \frac{|u \bullet v|}{\| v \|^2} \| v \| = \frac{|u \bullet v|}{\| v \|} \\ &= \frac{\| u \| \| v \| \cos(\theta)}{\| v \|} = \| u \| \cdot |\cos(\theta)|. \end{aligned}$$

□

4.3 Le produit vectoriel (cross product)

Le produit vectoriel associe à deux vecteurs de l'espace u et v un troisième vecteur, noté $u \times v$, et défini de la façon suivante :

Définition 4.8. Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs. Leur produit vectoriel est le vecteur $u \times v$ défini par

$$\begin{aligned} u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$i = (1,0,0) \qquad j = (0,1,0) \qquad \text{et} \qquad k = (0,0,1).$$

Alors

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Le produit vectoriel satisfait les propriétés suivantes :

Théorème 4.9. *Si u, v et w sont des vecteurs dans l'espace de dimension 3, on a :*

(a) $u \bullet (u \times v) = 0$ — *$u \times v$ est orthogonal à u*

(b) $v \bullet (u \times v) = 0$ — *$u \times v$ est orthogonal v*

(c) $\| u \times v \|^2 = \| u \|^2 \cdot \| v \|^2 - (u \bullet v)^2$ — *identité de Lagrange.*

(d) $u \times (v \times w) = (u \bullet w)v - (u \bullet v)w$

(e) $(u \times v) \times w = (u \bullet w)v - (v \bullet w)u$

Démonstration :

(a) Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Alors

$$\begin{aligned} u \bullet (u \times v) &= (u_1, u_2, u_3)(u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) = \\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = \\ &= u_1u_2u_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0\,. \end{aligned}$$

(b) calcul similaire à (a)

(c) On a

$$\| u \times v \|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

et

$$\| u \|^2 \ \| v \|^2 - (u \bullet v)^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^3)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$

et un calcul direct montre que les deux termes de droites sont égaux.

(d) Les égalités (d) et (e) se montrent de manière similaire.

□

Le produit vectoriel est bilinéaire et anti-symétrique. En d'autres termes, on a

Théorème 4.10. *(a)* $u \times v = -(v \times u)$
(b) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
(c) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
(d) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
(e) $u \times 0 = 0 \times u = 0$
(f) $u \times u = 0$.

La notion de produit vectoriel est liée à celle de colinéarité par le théorème suivant :

Théorème 4.11. *Soient u et v deux vecteurs non nuls de l'espace de dimension 3. Les affirmations (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) u et v sont colinéaires (c'est-à-dire $u = \ell v$)
(2) $u \times v = 0$.

Démonstration :
(1) $\Longrightarrow$ (2) : Supposons que $u = \ell v$. Alors

$$u \times v = (\ell v) \times v = \ell(v \times v) = 0.$$

ce qui démontre (2).
Montrons maintenant l'implication inverse (2) $\Longrightarrow$ (1) : Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Supposons que $u \times v = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} u_2v_3 - u_3v_2 &= 0 \\ u_3v_1 - u_1v_3 &= 0 \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

1er cas : Si $u_1 \neq 0$ et $u_2 = u_3 = 0$, les équations deviennent

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -u_1v_3 &= 0 \\ u_1v_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Comme $u_1 \neq 0$, ceci entraîne $v_2 = v_3 = 0$ et donc

$$\begin{aligned} u &= (u_1, 0, 0) \\ v &= (v_1, 0, 0) \end{aligned}$$

Comme v est non nul, on a $v_1 \neq 0$, d'où $u = \ell v$ avec $\ell = \frac{u_1}{v_1}$ ce qui démontre (1).

2ème cas : Supposons maintenant que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$. Si $v_2 = 0$ la 1-ère équation devient

$$u_2v_3 = u_3v_2 = 0.$$

Comme $u_2 \neq 0$, ceci entraîne $v_3 = 0$. Comme par hypothèse v est non nul, on doit avoir $v_1 \neq 0$. Alors par la 3ème équation, on a

$$u_1v_2 = u_2v_1 \neq 0$$

ce qui implique $v_2 \neq 0$ ce qui est absurde. Ainsi, on a donc $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$.
Posons

$$\ell = \frac{u_1}{v_1}\,.$$

Alors la 3-ème équation donne

$$\frac{u_2}{v_2} = \ell$$

et par la 2ème équation on a

$$u_3v_1 = u_1v_3$$

ce qui implique

$$u_3 = \frac{u_1}{v_1}v_3 = \ell v_3.$$

En conclusion, on a

$$u = \ell \cdot v$$

ce qui démontre (2). $\square$

4.3.1 Interprétation géométrique du produit vectoriel

Nous avons vu que

$$\| u \times v \|^2 = \| u \|^2 \| v \|^2 - (u \bullet v)^2$$

(identité de Lagrange). Soit θ l'angle formé par u et v. Alors on a :

$$u \bullet v = \| u \| \| v \| \cos(\theta) .$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\| u \times v \|^2 &= \| u \|^2 \| v \|^2 - \| u \|^2 \| v \|^2 \cos^2\theta \\
&= \| u \|^2 \| v \|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \| u \|^2 \| v \|^2 \sin^2\theta .
\end{aligned}$$

On obtient donc

Théorème 4.12.

$$\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \sin(\theta)$$

DÉMONSTRATION : Comme

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

on a

$$\sin(\theta) \geq 0 .$$

et donc l'égalité cherchée. □

Considérons maintenant un parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs u et v :

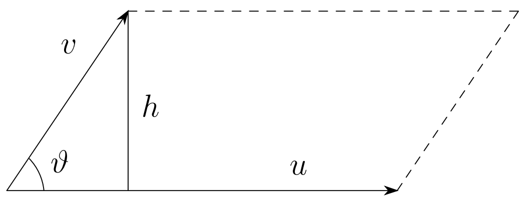


Figure 6.12 : $h = \| v \| \sin(\theta)$

L'aire A de ce parallélogramme se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
A &= (\text{base})\cdot(\text{hauteur}) \\
&= \| u \| \| v \| \sin(\theta) \\
&= \| u \times v \| .
\end{aligned}$$

On obtient donc le théorème suivant qui donne une interprétation géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs :

Théorème 4.13. *La norme $\| u \times v \|$ est égale à l'aire du parallèlogramme déterminé par u et v. En résumé, $u \times v$ est un vecteur perpendiculaire à u et v, et de longueur (norme) égale à l'aire du parallèlogramme déterminé par u et v. De plus, l'otientation du triplet $(u, v, u \times v)$ est positive*

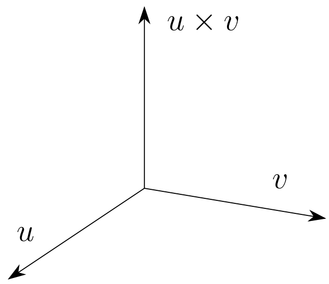


Figure 6.13

4.4 Le produit mixte (triple product)

Définition 4.14. Soient u, v et w des vecteurs de l'espace de dimension 3. On définit le produit mixte des vecteurs u, v et w par

$$[u,\, v,\, w] = u \bullet (v \times w)\,.$$

C'est un scalaire. Si $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$, $v = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ et $w = (w_1,\, w_2,\, w_3)$ alors

$$\begin{aligned}
[u, v, w] &= u \bullet (v \times w) \\
&= u \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} k \right) \\
&= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

Théorème 4.15. *Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace. Alors*

(1) $[u, v, w] = [w, u, v] = [v, w, u] = -[v, u, w] = -[u, w, v] = -[w, v, u]$

(2) $[\lambda u, v, w] = \lambda [u, v, w]$ *pour tout scalaire* λ.

(3) $[u, v, w] = 0$ *si et seulement s'il existe des scalaires* α, β, γ *non tous nuls tels que* $\alpha u + \beta v + \delta w = 0$.

Démonstration : (1) et (2) découlent directement de la définition. Montrons alors la propriété (3). Supposons que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

avec α, β, γ non tous nuls. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha \neq 0$.
Alors

$$u = \lambda v + \mu w$$

avec

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \mu = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

et

$$\begin{aligned}
[u, v, w] &= (\lambda v + \mu w) \bullet (v \times w) \\
&= \lambda \underbrace{v \bullet (v \times w)}_{0} + \mu \underbrace{w \bullet (v \times w)}_{0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $[u, v, w] = 0$. On a donc

$$(u \times v) \bullet w = 0$$

c'est-à-dire que $u \times v$ est orthogonal à w. Mais $u \times v$ est aussi orthogonal à u et à v. Ceci entraîne que u, v et w sont coplanaires et donc que l'on peut écrire

$$w = \alpha u + \beta v$$

ce qui termine la démonstration. □

Le produit mixte peut également être interprété géométriquement ce qui est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.16. *(1) Soit $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors la valeur absolue du déterminant*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

est égal à l'aire du parallèlogramme défini par les vecteurs u et v.

(2) Soient $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

est égal au volume du parallélépipède déterminé par ces trois vecteurs

Démonstration :

(1) On considère u et v comme vecteurs de l'espace de dimension 3 :

$$u = (u_1,\, u_2,\, 0) \qquad \text{et} \qquad v = (v_1,\, v_2,\, 0)$$

Alors

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k\,.$$

L'aire du parallélogramme déterminé par u et v est

$$\begin{aligned} \| \, u \times v \, \| &= \left\| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} k \right\| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \| \, k \, \| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

(2) Prenons le parallélogramme déterminé par v et w comme base du parallélépipède déterminé par u, v et w. L'aire de la base est donc

$$\| \, v \times w \, \|$$

et la hauteur du parallélépipède est la projection orthogonale de u sur $v \times w$.

On a

$$h = \| \, \mathrm{proj}_{v \times w} u \, \| = \frac{|u \bullet (v \times w)|}{\| \, v \times w \, \|}$$

et le volume V du parallélépipède est alors

$$\begin{aligned} V &= (\text{aire de la base}) \cdot (\text{hauteur}) \\ &= \| \, v \times w \, \| \, \frac{|u \bullet (v \times w)|}{\| \, v \times w \, \|} \\ &= |u \bullet (v \times w)| \end{aligned}$$

qui est donc bien la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

□

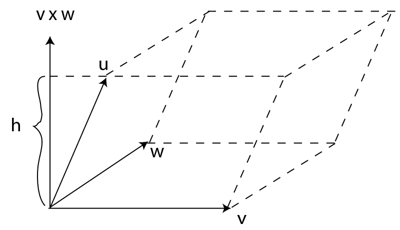


Figure 6.14 : h = hauteur

4.5 Droites et plans dans l'espace de dimension 3

4.5.1 Equation du plan passant par un point P_0 et ayant vecteur normal n

Soit $P_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$ un point de l'espace de dimension 3 et $n = (n_1,\, n_2,\, n_3)$ un vecteur.

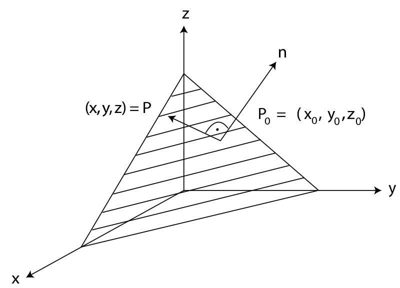


Figure 6.15

Le plan passant par P_0 et ayant n comme vecteur normal est formé des points P tels que le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est orthogonal au vecteur n. On a donc

$$\overrightarrow{P_0P} \bullet n = 0\,.$$

Si $P = (X,\, Y,\, Z)$ alors $\overrightarrow{P_0P} = (X - x_0,\, Y - y_0,\, Z - z_0)$ et la condition $\overrightarrow{P_0P} \bullet n = 0$ s'écrit

$$(X - x_0,\, Y - y_0,\, Z - z_0) \bullet (n_1,\, n_2,\, n_3) = 0$$

ou encore

$$n_1(X - x_0) + n_2\,(Y - y_0) + n_3\,(Z - z_0) = 0\,.$$

Exemple 4.17. L'équation du plan passant par le point $P_0 = (2, -5, 6)$ et perpendiculaire au vecteur $n = (1, 3, -2)$ est

$$(X - 2) + 3(Y + 5) - 2(Z - 6) = 0$$

ou encore

$$X + 3Y - 2Z + 25 = 0.$$

Théorème 4.18. *Soient a, b, c, d des scalaires tels que $abc \neq 0$. Alors l'équation*

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

est l'équation d'un plan ayant comme vecteur normal le vecteur

$$n = (a,\, b,\, c).$$

DÉMONSTRATION : Par hypothèse, les scalaires a, b, c sont non tous nuls. Nous pouvons supposer que $a \neq 0$. Alors l'équation
$$aX + bY + cZ + d = 0$$
peut être réécrite comme
$$a\left(X + \frac{d}{a}\right) + bY + cZ = 0\,.$$
Mais ceci est l'équation du plan passant par le point $(-\frac{d}{a},\, 0,\, 0)$ et ayant comme vecteur normal le vecteur $(a,\, b,\, c)$. □

4.5.2 Droites dans l'espace de dimension 3

Soit L la droite passant par le point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et parallèle au vecteur $v = (a,\, b,\, c)$. Alors L est constituée des points $P = (X, Y, Z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est parallèle au vecteur v. Autrement dit :
$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda v$$
pour un scalaire λ. On a donc
$$(X - x_0,\, Y - y_0,\, Z - z_0) = (\lambda a,\, \lambda b,\, \lambda c)$$
ou, de manière équivalente,
$$\begin{aligned} X - x_0 &= \lambda a \\ Y - y_0 &= \lambda b \\ Z - z_0 &= \lambda c \end{aligned}$$
Ce système est est appelé *système d'équations paramétriques de la droite L.*

Théorème 4.19. *La distance D entre le point $P_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$ et le plan d'équation*
$$aX + bY + cZ + d = 0$$
est donnée par
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$
DÉMONSTRATION :

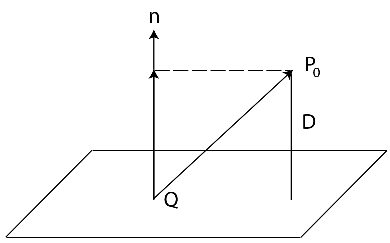


Figure 6.16

Soit $Q = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ un point du plan. On place le vecteur normal n au point Q. La distance de P_0 au plan est égale à la norme de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{QP_0}$ sur le vecteur n :
Donc
$$D = \| \operatorname{proj}_n \overrightarrow{QP_0} \| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \bullet n|}{\| n \|}.$$

On a $\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1,\, y_0 - y_1,\, z_0 - z_1)$ et ainsi

$$\overrightarrow{QP_0} \bullet n = (x_0 - x_1,\, y_0 - y_1,\, z_0 - z_1) \bullet (a,\, b,\, c) = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1).$$

Comme

$$\| n \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

on a

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Or $Q = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ est un point du plan, ce qui entraîne que $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ et donc que $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. On obtient finalement

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

□

Chapitre 5

ESPACES VECTORIELS

5.1 Définitions et propriétés

5.1.1 Définition d'un espace vectoriel sur un corps

Un groupe commutatif $(E,+)$ est un ensemble E muni d'une loi de composition interne $(x+y) \in E$, définie pour tous éléments x et y de E, ayant les propriétés suivantes :
(1) Associativité : $x+(y+z)=(x+y)+z$, $\forall x,y,z \in E$
(2) Il existe un élément neutre $0 \in E$ qui vérifie : $\forall x \in E$, $x+0=0+x=x$.
(3) Tout élément x de E possède un symétrique, noté $-x$ tel que

$$x+(-x)=(-x)+x=0.$$

(4) Commutativité : $x+y=y+x$, $\forall x,y \in E$.
Définition 1 : Soit $(E,+)$ un groupe commutatif et K un corps(commutatif).
Nous dirons que E est **un espace vectoriel sur** K
(qui est appelé le corps de base de l'espace vectoriel)
s'il existe une loi de composition externe associant à tout élément $\alpha \in K$ et tout élément $x \in E$, un élément de E, noté αx,avec les propriétes suivantes :
(5) $1x=x$, tout élément $x \in E$.
(6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha,\beta \in K$.
(7) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x,y \in E$.
(8) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\forall \alpha,\beta \in K$, tout élément $x \in E$.
Ainsi on dit que E est un K-espace vectoriel.
Un élément x de E (qu'on pourrait écrire $\vec{x}$) est dit **vecteur** et ceux de K **scalaires**.
Deux vecteurs x et y de E sont dit colinéaires s'il existe $\lambda \in K$ tel que

$$y=\lambda x$$

Nous laissons au lecteur le soin de distinguer l'élément neutre de E
(qu'on pourrait écrire $\vec{0}$ ou 0_E),
qui est un vecteur, de l'élément nul 0 de K (qu'on pourrait écrire 0_K),
qui est un scalaire.
Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :
Tout élément $x \in E$ $0x=0$, d'après (8) si $\beta=-\alpha$.
Tout élément $x \in E$, $\forall \alpha \in K$, $\alpha x=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$ ou $x=0_E$.
On a en outre : $\alpha(-x)=(-\alpha)x=-\alpha x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha \in K$.

Et, en particulier $(-1)\,x = -x$.

5.1.2 Définition générale d'un espace vectoriel sur un corps $(\mathbb{k}, \heartsuit, \clubsuit)$

Ici $(\mathbb{k}, \heartsuit, \clubsuit)$ est un corps dont l'élément neutre de la deuxième loi est noté $e_\clubsuit$
et l'élément neutre de la première loi est $e_\heartsuit$.
Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée "$\oplus$",
de sorte que $(E, \oplus)$ soit un **groupe commutatif** d'élément neutre $e_\oplus$**.**
Aussi, on munit E d'une loi de composition externe "$\otimes$" sur $\mathbb{k}$, c'est-à-dire
$\otimes : E \times \mathbb{k} \longrightarrow E$, $(x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x$,
Si on a :
(1) $e_\clubsuit \otimes x = x$, tout élément $x \in E$.
(2) $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \clubsuit \beta) \otimes x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$.
(3) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{k},\ \forall x, y \in E$.
(4) $(\alpha \heartsuit \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)\,,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$, tout élément $x \in E$.
En plus d'avoir $(E, \oplus)$ comme un **groupe commutatif,** nous dirons
que $(E, \oplus, \otimes)$ a une **structure d'espace vectoriel sur le corps** $(\mathbb{k}, \heartsuit, \clubsuit)$.
Un élément x de E (qu'on pourrait écrire $\vec{x}$) est dit **vecteur** et ceux de $\mathbb{k}$ **scalaires**.
Deux vecteurs x et y de E sont dit colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que

$$y = \lambda \otimes x$$

Le vecteur nul de $(E, \oplus, \otimes)$ est l'élément neutre $e_\oplus$.
Ici $e_\heartsuit$ et $e_\clubsuit$ sont des scalaires éléments neutres respectifs de $\heartsuit, \clubsuit$.
Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :
$\boxdot$ Tout élément $x \in E$ $\ e_\heartsuit \otimes x = e_\oplus$, d'après (4) si $\beta = symét_\heartsuit(\alpha)$.
(Soulignons que $symét_\heartsuit(\alpha)$ est le symétrique de α par rapport à la loi $\heartsuit$.
Et que $symét_\heartsuit(\alpha)\,\heartsuit\alpha = \alpha\heartsuit symét_\heartsuit(\alpha) = e_\heartsuit$.)
$\boxdot$ Tout élément $x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{k}$, $\ \alpha \otimes x = e_\oplus \Longleftrightarrow \alpha = e_\heartsuit$ ou $x = e_\oplus$.
$\boxdot$ On a en outre : $\alpha \otimes symét_\oplus(x) = (symét_\heartsuit(\alpha)) \otimes x = symét_\oplus(\alpha \otimes x)$,
tout élément $x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{k}$.
$\boxdot$ Et, en particulier $\ (symét_\heartsuit(e_\clubsuit)) \otimes x = symét_\oplus(e_\clubsuit \otimes x) = symét_\oplus(x)$.

Exemples

a) Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.
On munit l'ensemble K^n des lois définies par les formules ci-dessous :
$\forall (u_1, u_2, ..., u_n)\,, (v_1, v_2, ..., v_n) \in K^n$,
$(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)\,.$
$\forall (u_1, u_2, ..., u_n) \in K^n$, $\ \forall \alpha \in K$,
$\alpha\,(u_1, u_2, ..., u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n)\,.$
Ces lois font de K^n un K-espace vectoriel.
b) L'ensemble $\mathbb{C}\,[x]$ des polynômes à une variable x et à coefficients dans $\mathbb{C}$
est un espace vectoriel sur le corps des nombre complexes, l'addition étant celle
des polynômes et la multiplication par un nombre complexe c le produit d'un
polynôme par c.
Ce même ensemble est aussi un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels avec
une loi externe de multiplication par un nombre réel.On dit que $\mathbb{C}\,[x]$ est un espace
vectoriel complexe si son corps de base est $\mathbb{C}$ Si le corps de base est $\mathbb{R}$,

on dit qu'on a un espace vectoriel réel.

Sous-espaces vectoriels

Définition 2 : Une partie non vide F d'un K-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
1°) $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$
2°) $\forall\alpha\in K$, $\forall x\in F$, $\alpha x\in F$.
Les opérations définies dans E sont donc également définies dans F et lui confère une structure d'espace vectoriel sur K. Ainsi un sous-espace vectoriel d'un K-espace vectoriel E est un sous-ensemble $F\neq\varnothing$ de E caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll}\forall x,y\in F & : x+y\in F\\ \forall\alpha\in K,\forall x\in F, & \alpha x\in F.\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\forall\alpha,\beta\in K,\ \forall x,y\in F,\ \ \alpha x+\beta y\in F.$$

Exemples : a) Soit une suite $(x_1,x_2,.....,x_n)$ de n éléments d'un K-espace vectoriel E; une **combinaison linéaire** de cette suite est un élément de E de la forme :

$$y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+.....+\alpha_nx_n$$

où $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n$ sont des scalaires de K.
L'ensemble F des combinaisons linéaires de la suite $(x_1,x_2,.....,x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Nous appellerons ce sous-espace vectoriel F le **sous-espace engendré** par la suite $(x_1,x_2,.....,x_n)$.
b) Soit E un K-espace vectoriel, l'ensemble réduit au singleton vecteur nul :$\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , ainsi que E lui-même.
Le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ et E sont dit **sous-espaces vectoriels triviaux** de E.
Tout autre sous-espace vectoriel F de E est dit **sous-espace vectoriel propre** de E,et vérifie : $\{0_E\}\subset F\subset E$.
c) L'ensemble des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $n\in\mathbb{N}^*$, forme avec le polynôme nul, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x]$.

5.1.3 Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs

Définition 3. Soit E un K-espace vectoriel,on dit que la suite de vecteurs $(x_1,x_2,.....,x_n)$ est **liée** si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n\in K$, non tous nuls, tels que :

$$(9):\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+.....+\alpha_nx_n=0$$

On dit également, par abus de langague, que les vecteurs de la suite sont liés, ou encore **linéairement dépendants**.
Si la suite $(x_1,x_2,.....,x_n)$ n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**, ou encore que $x_1,x_2,.....,x_n$ sont libres ou **linéairement indépendants ;**

ceci signifie que l'égalité (9) entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.
Si la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre , il en est de même de toute suite partielle et, en particulier, tous les éléments x_i de la suite sont distincts.

Propriété 1

Pour qu'une suite de vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ soit liée, il faut et il suffit que l'un d'eux soit une combinaison linéaire des autres.

Théorème 1

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite de n vecteurs d'un espace vectoriel E.
Soit $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ une suite de $(n+1)$ combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$. Alors la $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ est liée.

5.2 Espaces vectoriels de dimension finie

5.2.1 Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs

Définition 4. On dit qu'un K-espace vectoriel E possède n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$, si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des vecteurs de E et si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Il en résulte que E coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et est donc l'espace engendré par cette suite.

Le **théorème 1** entraîne immédiatement :

Propriété 2

Soit E un K-espace vectoriel ayant n générateurs. Alors toute suite de $(n+1)$ vecteurs de E est liée.

5.2.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 5. Soit E un K-espace vectoriel. On dit que la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une **base** de E, si l'on a les deux propriétés suivantes :
1°) $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des générateurs de E.
2°) La suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

Propriété 3

Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E un K-espace vectoriel. Pour que la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit une base de E, il faut et il suffit que tout vecteur $y \in E$ s'exprime de façon unique sous la forme :

$$y = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$$

$\alpha_i \in K; \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$.
α_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur y par rapport à la base $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Le théorème suivant exprime l'invariance du nombre d'éléments d'une base.

Théorème 2

Soit E un K-espace vectoriel ayant une base $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Toute autre base de E est formée de n éléments. Toute suite libre $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est une base de E. Aussi toute suite génératrice $(z_1, z_2, ..., z_n)$ est une base de E.

Définition 6. Soit E un K-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.
On dit que E est de **dimension finie** s'il existe un entier n et une base de E composée de n éléments.Alors, d'après le théorème 2, toute base de E est formée

de n éléments ; cet entier n s'appelle la **dimension** de E et se note

dim E ou $(\dim_K E)$.

Remarques

a) Si $E = \{0\}$, il n'y a pas de base ; on dit encore que E est de dimension nulle et on pose dim $E = 0$.

b) Un K-espace vectoriel non nul de dimension finie, a une infinité de bases.

Exemples

a°) Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul. Le K-espace vectoriel K^n a une base dite **base canonique** $(e_1, e_2, ..., e_n)$ où le vecteur e_k est le vecteur $(0, 0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$, le 1 étant la $k^{ième}$ coordonnée, toutes les autres coordonnées sont nulles.

b°) Soit E l'espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n, avec le polynôme nul. La suite de polynômes $(1, x, x^2, ..., x^n)$ forme une base de E.

Donc dim $E = n + 1$. Avec $a \in \mathbb{C}$, on vérifie que $\left(1, x - a, (x - a)^2, ..., (x - a)^n\right)$ est aussi une base de E.

c°) Il ne faut pas croire que tout espace vectoriel soit de dimension finie.

Ainsi l'espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ de tous les polynômes complexes n'est pas de dimension finie ; s'il était de dimension n, $n + 1$ polynômes quelconques seraient liés ; or la suite $(1, x, x^2, ..., x^n)$ est une suite libre de $n + 1$ vecteurs.

Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**.

5.3 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

La propriété suivante nous sera utile dans cette étude.

Propriété 4

Soit E un K-espace vectoriel et $n \geq 0$ un entier. Supposons que toutes les suites de $(n + 1)$ vecteurs de E soient liées. Alors E est un espace vectoriel de dimension finie et dim $E \leq n$.

Corollaire 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E.Alors F est de dimension finie et dim $F \leq$ dim E. De plus, si dim $F =$ dim E, on a $F = E$.

Une autre conséquence de la propriété 4 est la suivante :

Corollaire 2

Soit E un espace vectoriel ayant n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$, alors E est un espace vectoriel de dimension finie et dim $E \leq n$.

5.3.1 Rang d'une suite finie de vecteurs

Considérons une suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs d'un K-espace vectoriel E, de dimension finie ou non. Le sous-espace F engendré par cette suite admet les n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$; c'est donc, d'après le corollaire 2, un espace vectoriel de dimension finie $r \leq n$.

Définition 6. On appelle **rang** r **d'une suite finie de** n **vecteurs** d'un K-espace vectoriel la dimension de l'espace vectoriel E engendré par ces vecteurs. On a $r \leq n$.

Remarque

Si dim $E = n$, n générateurs de E forment une base de E.

5.4 Sous-espaces supplémentaires

THEOREME DE LA BASE INCOMPLETE

Définition 8

Soit E un K-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont appelés **supplémentaires** si tout élément $x \in E$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme : $x = y + z, \ y \in F, \ z \in G$.

On dit encore que E est la **somme directe** de F et G et on écrit :

$$E = F \oplus G$$

En particulier $F \cap G = \{0_E\}$.

Théorème 3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :

(a) *F et G sont supplémentaires*

(b) *$F \cap G = \{0_E\}$ et dim E =dim F + dim G.*

Théorème 4. (De la base incomplète).

1. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Pour toute suite libre $(y_1, y_2, ..., y_p)$ de E $(p \leq n)$, on peut trouver $q = n - p$ vecteurs $z_1, z_2, ..., z_q$ de E tels que $(y_1, y_2, ..., y_p, z_1, z_2, ..., z_q)$ soit une base de E.*
2. *Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G.*

Chapitre 6

APPLICATIONS LINÉAIRES

6.1 Image et Noyau

Définition 1 (d'une application linéaire)
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes :
(1) $\forall x \in E,\ \forall y \in E \quad , \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
(2) $\forall x \in E, \quad \forall \alpha \in K, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Remarques

a°) On déduit de (1) en posant $y = x = 0 \in E,\ f(0) = 0 \in F$.
On a également $f(-x) = -f(x)$.

b°) (1) et (2) $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

c°) Soit E munit d'une base $(e_1, e_2, \ldots.., e_n)$,
pour tout $y \in E,\ \exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_n \in K;\ y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$;
d'où $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$; et on constate que f est déterminée par son action sur une base de E.

Définition 2 (du noyau d'une application linéaire)
Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble des vecteur $x \in E$ tels que $f(x) = 0$. Il est noté $Ker\ f$. D'où $Ker\ f = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$.

Lemme 1. *Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1. *Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $Ker\ f = \{0_E\}$.*

Définition 3 (de l'image d'une application linéaire)
L'**image** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble image de E par l'application f , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à F tels qu'il existe au moins un vecteur $x \in E$ avec $f(x) = y$. On la note $f(E)$ ou encore $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F,\ \exists x \in E;\ f(x) = y\} = f(E)$$

Lemme 2 *L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.*

Remarque

L'image par une application linéaire $f : E \to F$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 2

Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Définition 4 (d'un isomorphisme)

Une application linéaire $f : E \to F$ est un **isomorphisme** si elle est injective et surjective. On dit alors que E et F sont **isomorphes** par f.
Deux espaces E et F sont **isomorphes** noté($E \simeq F$) ,
s'il existe un isomorphisme f de E sur F.
Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, il existe une application inverse f^{-1}; et f^{-1} est un isomorphisme de F sur E. $f : E \to F$ est
un isomorphisme $\Longleftrightarrow Ker\ f = \{0\}$ et $f(E) = F$.
Théorème 1
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f : E \to F$. Alors :

$$(a)\ f \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } F.$$
$$\Updownarrow$$
$$(b)\ dimE = dimF \text{ et } Kerf = \{0_E\}.$$
$$\Updownarrow$$
$$(c)\ dimE = dimF \text{ et } \operatorname{Im} f = F$$

Lemme 3 *Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite libre de vecteurs de E et une application linéaire $f : E \to F$ injective. Alors $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$ est une suite libre dans F.*

6.1.1 Le théorème noyau-image

Théorème 2
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et une application linéaire $f : E \to F$. Si la dimension de E est finie, il en est de même des dimensions de $Kerf$ et de $f(E) = \operatorname{Im} f$ et l'on a : $\dim E = \dim f(E) + \dim Ker\ f$.
Lemme 4
Soient E de dimension finie et une application linéaire $f : E \to F$. Alors $f(E) = \operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
Corollaire. *Avec les hypothèses du théorème 2 :*
$$Ker\ f = \{0\} \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim f(E) = \dim E.$$

6.1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5. Le **rang** d' une application linéaire $f : E \to F$.
Avec E de dimension finie est par définition la dimension
de l'image $f(E) = \operatorname{Im} f$.

Exemples.

a°) L'application $f : E \to F$ qui, à tout vecteur $x \in E$ associe le vecteur nul de F est linéaire. On a $\operatorname{Im}\ f = \{0\}$ et le rang de f est nul.Le noyau $\ker f = E$.
b°) L'application f de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le vecteur x est linéaire. $Ker\ f = \{0\}$, $f(E) = E$. On l'appelle l'**identité** I_E.
C'est un isomorphisme de E sur E,ou **automorphisme** de E.
c°) Si E est un espace vectoriel sur le corps K et $a \neq 0$ un élément de K, l'application $f\ x \longmapsto ax$ est une application linéaire de E sur E et c'est un automorphisme(homothétie vectorielle).

d°) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. A tout vecteur $x \in E$, on peut faire correspondre sa composante $y \in F$ définie par :

$$x = y + z,\ y \in F,\ z \in G.$$

L'application $f : x \longmapsto y$ est une application linéaire de E dans F qu'on appelle **projection** sur F parallèlement à G. Le noyau de f est G et l'image $f(E)$ est F. Si E est de dimension finie, on vérifie directemnet le théorème noyau-image sur les dimensions.

e°) Soit E l'espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n, avec le polynôme nul. L'application $f : P \longmapsto P + P'$, où P' est le polynôme dérivé de P, est une application linéaire de E dans E, on dit encore que c'est un $\mathbb{C}$-endomorphisme de E.

On vérifie directement que $Ker\ f = \{0\}$; il résulte alors du théorème 1 que f est un automorphisme de E donc est surjective. D'une façon générale, une application linéaire d'un espace vectoriel E sur le corps K dans lui-même s'appelle un K-**endomorphisme** ou même simplement un **endomorphisme.**

f°) Une application linéaire de E un K-espace vectoriel dans K s'appelle une **forme linéaire** sur E (K est un espace vectoriel sur lui-même). Soit f une forme linéaire non nulle sur un K-espace vectoriel E de dimension n.On a $\mathrm{Im}\ f \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}\ f \subset K$; donc l'image de f , espace de dimension 1 appelé **droite vectorielle** (à cause de sa dimension qui est **1**) et le noyau de f est de dimension $n-1$ et on dit que c'est un **hyperplan** de E. un K-espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel.**

L'ensemble des formes linéaires de E se note E^* ou $\mathcal{L}(E, K)$ c'est un K-espace vectoriel appelé le **dual** de E.

6.2 Opérations sur les applications linéaires

6.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Appelons $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Somme de deux applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F.

On définit $f + g : E \to F$ par : $\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

On vérifie que $f + g$ est bien une application linéaire de E dans F. On l'appelle **somme** de f et g.

Produit de $\alpha \in K$ **par** $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il est définit par : $\forall x \in E,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

On vérifie que αf est bien une application linéaire de E dans F.

Proposition 3

Les deux opérations précédentes confèrent à l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ une structure d'espace vectoriel sur K.

6.2.2 Composition des applications linéaires

Soit E, F et G trois K-espaces vectoriels. Etant donné une application linéaire $f : E \to F$ et une application linéaire $g : F \to G$,on vérifie immédiatement que

$g \circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G. En particulier, si $E = F = G$, nous définissons une loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E) = End(E)$ avec la loi"$\circ$" des compositions des applications qu'on appelle la **multiplication.**

Proposition 4. *L'addition et la multiplication définies dans* $\mathcal{L}(E)$ *en font un anneau.*

Remarque. Le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme et donc, en particulier, le composé de deux automorphismes de E est un automorphisme. Si E est de dimension finie, l'ensemble des automorphismes de E constitue le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

6.3 Matrice d'une application linéaire $f : E \to F$

Relativement à des bases données de E **et de** F.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et q sur K, $\beta = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F; f est déterminée par son action sur la base β, c'est-à-dire que f est entièrement définie par les $f(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} t_i,\ a_{ij} \in K,\ \ j = 1, 2, ..., p$.Ainsi les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ constitue la matrice colonne suivante : $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$

Définition 1. On appelle **matrice de l'application linéaire** $f : E \to F$, **relativement aux bases** β **et** β',avec $\beta = (e_1, ..., e_p)$ et $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ (on sait que f est entièrement définie par les $f(e_j) \in F$, pour tout $j \in [|1, p|]$), est la matrice de type (q, p) :

$$M_{\beta'\beta}(f) = \begin{array}{c} f(e_1)\,;\, f(e_2)\,;\, ...;\, f(e_p) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & ... & a_{qp} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_q \end{array}$$

dont la $j^{ème}$ colonne $(j = 1, 2, ..., p)$ est constituée par les coordonnées $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$ du vecteur $f(e_j)$ par rapport à la base β'. C'est pourquoi nous avons écrit $f(e_1)$ au dessus de la première colonne, ..., $f(e_p)$ au-dessus de la $p^{ième}$ colonne.

Lorsque $E = F$, l'application linéaire f est un endomorphisme de E et nous pouvons choisir $\beta = \beta'$. La matrice $M_{\beta\beta}(f)$ s'appelle la matrice de l'endomorphisme relativement à la base β de E.

Exemple : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$(x, y, z) \longmapsto (2x - y - z; x - z; \lambda x - y - 2z)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\beta = (e_1; e_2; e_3)$la base canonique de $\mathbb{R}^3$.Pour trouver la matrice de f relativement à la base β associé à l'ensemble de depart et à l'ensemble

d'arrivé, il faut calculer : $f(e_1) = (2; 1; \lambda)$;
$f(e_2) = (-1; 0; -1)$; $f(e_3) = (-1; -1; -2)$.

Et la matrice en question est $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Proposition
Soient E, F, G trois $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives β, β',γ et $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_K(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_K(E, G)$
$M_{\gamma\beta}(g \circ f) = M_{\gamma\beta'}(g) \times M_{\beta'\beta}(f)$.

Proposition
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et q,
Munis respectivement des bases $\beta = (e_1, ..., e_p)$ et $\beta' = (t_1, ..., t_q)$
L'application de $\mathcal{L}_K(E, F)$ dans $M_{qp}(K)$ définie par $f \mapsto M_{\beta'\beta}(f)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F sur l'espace vectoriel des matrices de type(q, p) sur K.

Corollaire *L'espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E, F)$ est de dimension finie $n = pq$.*

Remarques
1°) Les espaces vectoriels $\mathcal{L}_K(E, F)$ et $M_{qp}(K)$ sont isomorphes mais cet isomorphisme dépend des bases β et β' choisies dans E et F.
On devrait le noter : $M_{\beta'\beta} : \mathcal{L}_K(E, F) \to M_{qp}(K)$.
Il est déterminé par le choix de ces bases.
2°) Il résulte de la proposition 1 qu'une matrice $q \times p$ quelconque dont les coefficients appartiennent à un corps K peut toujours être considérée comme la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p sur K dans un espace vectoriel F de dimension q sur K,
par exemple de $E = K^p$ dans $F = K^q$.

6.3.1 Changement de bases

Matrice de passage

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.
On voudrait avoir la matrice de : $Id_E : (E, \beta') \longrightarrow (E, \beta)$ telle que $x \longmapsto x$.
(E, β) signifie que le K-espace vectoriel de dimension finie E, est muni de la base β.
On sait que $\forall 1 \leq j \leq n$, $\exists (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{nj}) \in K^n$; $e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$.
Ainsi d'après ce qui précède en matière de la matrice d'une application linéaire relativement à des bases sur les espaces de départ et d'arrivé, on a :

$$M_{\beta\beta'}(Id_E) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 \ ; & e'_2 \ ; & \dots \ ; & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

On appelle matrice de **passage** de la base β à la base β',
la matrice : $Mat_{\beta\beta'}(Id_E) = P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$.
Comme l'application Id_E est bijective, alors $P = P_{\beta\beta'}$ est **inversible**.
En pratique donc,

la matrice $P = (\alpha_{ij})_{1\leq i\ ,\ j\leq n} = P_{\beta\beta'}$est telle que la $j^{-ième}$ colonne est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\beta = (e_1, ..., e_n)$.
Et $P^{-1} = P_{\beta'\beta}$ est la matrice de passage de la base β' à la base β.

Formule de changement de bases

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et (E, β), (F, γ)
Soit $(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{f} (F, \gamma) \xrightarrow{Id_F} (F, \gamma')$
On a bien $f = Id_F \circ f \circ Id_E \Longrightarrow$
$Mat_{\gamma'\beta'}(f) = Mat_{\gamma'\beta'}(Id_F \circ f \circ Id_E) = Mat_{\gamma'\gamma}(Id_F) \times Mat_{\gamma\beta}(f) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
Soit maintenant $u \in \mathcal{L}_K(E, E) \Longleftrightarrow u \in End_K(E)$, on a
$(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{u} (E, \beta) \xrightarrow{Id_E} (E, \beta')$, et $u = Id_E \circ u \circ Id_E \Longrightarrow$
$Mat_{\beta'\beta'}(u) = Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
Comme (Id_E) est une bijection de E dans E, alors $Mat_{\beta'\beta}(Id_E)$ est inversible et $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = \left(Mat_{\beta\beta'}(Id_E)\right)^{-1}$. De là on a la proposition suivante :

Proposition

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E, $u \in \mathcal{L}_K(E\ )$,
$P = P_{\beta\beta'} = Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$, $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$,
$A' = Mat(u, B') = Mat_{\beta'\beta'}(u)$
$= Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.,
or $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = \left(Mat_{\beta\beta'}(Id_E)\right)^{-1}$, donc :
$A' = P^{-1}AP$.

Exercice

Montrer que les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables.

Proposition de solution
La solution revient à trouver quatre vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que :
$Av_1 = 0$, $Av_2 = 0$, $Av_3 = v_2$, $Av_4 = v_2 + v_3$ *et* $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0$.
Dès lors ;
$Av_1 = 0$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_1 = (0, 0, 0, 1)$
$Av_2 = 0$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_2 = (1, 0, 0, 0)$
$Av_3 = v_2$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_3 = (0, 1, 0, 0)$
$Av_4 = v_2 + v_3$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_4 = (0, 0, 1, 0)$.

Soit $\gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, *on a* $\det\gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

De là soit $P = P_{pass(\beta\ \text{à}\ \gamma)} = P_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *alors on a :*

$$B = P^{-1}AP \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont semblables.}$$

Remarque :

Soit $x \in E$, soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E,

symboliquement on notera :
$x = \beta \times Mat\,(x, \beta)$ et $\beta' = \beta P_{\beta\beta'}$ ici β est considérée comme une matrice uniligne : $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$.

Proposition

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.

Soit $x \in E$, et $X_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Mat\,(x, \beta) =$ les coordonnées de x dans la base β,

et $X'_{\beta'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = Mat\,(x, \beta')$ alors $X_\beta = P_{\beta\beta'}\, X'_{\beta'}$.

Exercice à faire avec l'enseignant

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$

définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Soit $X_{\beta_0} = (2, -3, -4)$ les coordonnées d'un vecteur x_1 dans la base β_0

1. Calculer $f(x_1)$ dans la base β_0.
2. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
   a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β.
   c) Déterminer la matrice de passage P' de la base β à la base β_0.
   d) Donner les coordonnées de X_β dans la base β de deux façons.
   e) Déterminer la matrice D de f dans la base β de deux façons.
   f) Calculer $f(x_1)$ dans la base β, de deux façons.
   g) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.
      Donner A^2, A^3, A^4 en fonction de P, D et P^{-1}.
      Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

TRAVAUX DIRIGÉS

Calcul matriciel

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB, \quad BA, \quad A^2, \quad AC, \quad CA, \quad C^2, \quad BC, \quad CB, \quad B^2.$$

Exercice 2

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $(A+I)^3$ où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$.
2. En déduire :
   a) L'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Que A est inversible. Donner son inverse.
   c) Une extension de A^n où $n \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 3

Les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 4

Montrer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

est un diviseur de zèro sur $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$ et
trouver une matrice B non nulle telle que $AB = 0$.

Exercice 4

I) Les nombres 204, 527 et 255 étant divisibles par 17, démontrer que le déterminant suivant l'est aussi :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

.

II) Calculer les déterminants suivants :

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 6

Calculer le déterminant Δ de la matrice $M \in \mathcal{M}_4\ (\mathbb{R})$:

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

A quelle condition M est-elle inversible ? Donner sa matrice inverse.

Exercice 7

Déterminer, suivant les valeurs du paramètre a, le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1-a & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & a \\ 1 & a & a^3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & a & 3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & 0 & 1+a \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

I) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - y - z & = 4 \\ 3x + 4y - 2z & = 11 \\ 3x - 2y + 4z & = 11 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} 3x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ x + 3y - 3z & = -3 \end{cases},$$

$$\text{c)} \begin{cases} x + y - 3z & = 1 \\ 2x + y - 2z & = 1 \\ x + y + z & = 3 \\ x + 2y - 3z & = 1 \end{cases}.$$

II) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + (m-1)\,y - 3mz & = 2 \\ x - 2\,(m-1)\,y + mz & = 1 \\ x + (m-1)\,y - 2mz & = 2m \end{cases}.$$

Exercice 9

Déterminer $\lambda \in \dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ de façon que le système homogène :

$$\begin{cases} \left(\overline{3} - \lambda\right) x + \overline{4}y + \overline{3}z & = \overline{0} \\ \overline{3}x + \left(\overline{3} - \lambda\right) y & = \overline{0} \\ \overline{3}x \ + \ \overline{3}y \ - \ \lambda z & = \overline{0} \end{cases}$$

admette des solutions non nulles, et résoudre.

Exercice 10

Discuter et résoudre le système sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax + by + cz & = 1 \\ cx + ay + bz & = 1 \\ bx + cy + az & = 1 \end{cases}; \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 11

Discuter et résoudre le système sur $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z &= 0 \\ \overline{\alpha}x+\ y+\alpha z &= 0 \quad \text{où } \alpha\in\mathbb{C}. \\ \overline{\alpha^2}x+\alpha y+\ z &= 0 \end{cases}$$

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ et $\alpha\,(x,y)=(\alpha x,0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Ces deux lois de composition définissent-elles sur $\mathbb{R}^2$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

I) Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

a) $u=(1,2,-1);\ v=(1,0,1);\ w=(-1,2,-3)$

b) $u=(-1,2,5);\ v=(2,3,4);\ w=(7,0,-7)$.

II) Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

a) $u=(7,12);\ v=(18,-13);\ w=(-4,17)$

b) $u=(-1,0,2);\ v=(1,3,1);\ w=(0,1,-1)$

c) $u=(15,-27,-6,12);\ v=(-\frac{5}{2},\frac{9}{2},1,-2)$.

III) Déterminer tous les vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que le système suivant soit libre :

$$\{(1,0,0);\ (0,1,1);\ (x,y,z)\}$$

Exercice 3

On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectiriels et préciser alors leur dimension.

$$E_1=\{x\in\mathbb{R}^4\mid x_2=0\}\,;\ E_2=\{x\in\mathbb{R}^4\mid x_2\geq 0\}\,;\ E_3=\{x\in\mathbb{R}^4\mid x_1=x_2+x_3\}\,;$$
$$E_4=\{x\in\mathbb{R}^4\mid x_3x_4=0\}\,;\ E_5=\{x\in\mathbb{R}^4\mid x_1\in\mathbb{Q}\}\,;\ E_6=\{x\in\mathbb{R}^4\mid x_2=x_1^2\}\,.$$

Exercice 4

On considère $E=\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathfrak{B}=(1;\ x;\ x^2)$.

1. Montrer que $\mathfrak{B}_1=(1;\ 1+x;\ 1+x+x^2)$ est une base de E.
2. Ecrire $f(x)=2x^2+3x+4$ dans la base $\mathfrak{B}_1$.
3. Soit $P=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ dans la base $\mathfrak{B}_1$; quelles sont ses composantes dans la base $\mathfrak{B}$?
4. Le système $S=(3+2x+2x^2;\ 1+3x+2x^2;\ 3-5x-2x^2)$ est-il une base de E ? Si non, indiquer une relation qui lie les trois polynômes. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel de E engendré par ce système

Exercice 5

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$u=(2,1,0);\ v=(-1,0,1);\ w=(4,1,-2)$$

a) Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un élément de F.

b) Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et une base.

c) Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G.

d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base de $F + G$.

Exercice 6

Dans le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles F et G définis comme suit :

$F = \{(a - 3b, 2a + 3b, a)\,;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}\,;\ G = \{(x, y, z) \in E;\ x + 2y = 0\}\,.$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels on donnera une base et la dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 7

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y, y + z, z - 1); \\ g(x, y) &= (x, y, m) \textit{ où } m \textit{ est un paramètre réel.} \end{aligned}$$

Exercice 8

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

Exercice 9

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

1. Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective.
2. Donner une base du noyau de f.

Exercice 10

Soient $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel de base canonique $\mathfrak{B} = (e_1\ ;\ e_2\ ;\ e_3\ )$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$f\,(e_1\ ) = e_1\ + 3e_2\ ;\ \ f\,(e_2\ ) = -2e_1\ + e_3\ ;$

$f\,(e_3\ ) = -e_1\ + 2e_2\ + e_3\ .$

1. Déterminer la matrice A associée à f.
2. Déterminer une base de $Ker\,(f)$ et de $\mathrm{Im}\,(f)$.
3. Soit $u = e_1\ + e_2\ - e_3$, montrer que $(u,\ f\,(u)\,,\ f^2\,(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

4. Montrer que le système $(u,\ e_1\ ,\ e_2\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\beta_0\ = (e_1, e_2, e_3)$

définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer la matrice définie par : $(A - \lambda I_3)$ où I_3 est la matrice d'ordre 3 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Calculer le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. En déduire les solutions de l'équation $P(\lambda) = 0$.

3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par $E_{\lambda_i}\ = \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^3})$, où λ_i couvre les solutions de $P(\lambda) = 0$ et $Id_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

4. Soient $u_1\ = e_1\ + e_2\ + e_3$, $u_2\ = e_1\ + 3e_2\ + 2e_3$, $u_3\ = e_1\ + 2e_2\ + e_3$.
   a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β.
   c) Déterminer la matrice D de f dans la base β par la formule $D = P^{-1}AP$.
   d) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.
   Donner A^2, A^3, A^4 en fonction de P, D et P^{-1}.
   Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Série A

EXERCICE 1

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; y = 2x\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et déterminer une base de E.

EXERCICE 2

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.
Soient $\overrightarrow{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\overrightarrow{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\overrightarrow{w}_m = me_2 - e_3; m \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de m, $S_m = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_m\}$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$?
En déduire que S_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de passsage de la base β à la base S_1.
3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β.
4) Soit $\overrightarrow{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{H}$ dans la base S_1?
5) On considère l'application linéaire
$f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z)$.
a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β?
b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de $\mathbb{R}^3$.
c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(\ f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

EXERCICE 3

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -i & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -5 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer si possible les matrices suivantes : $E = AB$ et $E' = BA$
que peut-on conclure ?
2°) Calculer si possible les matrices : F=AD et F'=DA.
3°) Calculer C^3. En déduire que C n'est pas inversible.

EXERCICE 4

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que A et B Sont inversible et déterminer leur inverse.
Mêmes questions pour C=AB.

2°) Résoudre dans IR^3l'équation matricielle $CT = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.

EXERCICE 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^2 = A - I_2$.
b) Calculer A^3
c) Montrer que, si p est un entier positif, on a :
$A^{3p} = (-1)^p I_2$, $A^{3p+1} = (-1)^p A$, $A^{3p+2} = (-1)^p (A - I_2)$.
d) Les suites réelles (u_n) et (v_n) sont définies par les relations de récurrence :
$u_{n+1} = u_n + v_n$, $v_{n+1} = -u_n$ et par la donnée de u_1 et v_1.
Calculer u_n et v_n en fonction de u_1, v_1 et n, en particulier
pour $n = 3p$; $n = 3p + 1$; $n = 3p + 2, p \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6

Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'application $\mathbb{R}$ - linéaire $u : E \to E$ définie par :
$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = -u(e_1)$, $u(e_3) = e_1 - e_2$.
Soit M la matrice de u dans la base β. On pose :
$f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$ et $\varsigma = (f_1, f_2, f_3)$.
1) Écrire la matrice M.
2) Calculer la dimension de $Ker(u)$, le rang de u et le rang de M.
3) Montrer que ς est une base de E.
4) Soit P la matrice de passage de la base β à la base ς et
N la matrice de u dans la base ς.
4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N.
4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k.

EXERCICE 7

1°) Inverser si possible la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2°) Résoudre dans IR^3 en discutant éventuellement suivant les valeurs de m le système :

$$(\textstyle\sum_1) \begin{cases} 3x + y - z = -m \\ 3x + y - mz = -3 \\ (m-4)\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(\textstyle\sum_2) \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 3x + y + z = -3 \\ -5\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{avec les formules de Cramer } (\textstyle\sum_2).$$

Série B

EXERCICE 1

Sur l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ des polynômes à une indéterminée X de coéfficients réels, de degré égal à l'entier positif n, on définit l'addition de deux polynômes P et Q par :

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

a) Examiner si l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.

b) Même question pour l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes à une indéterminée X, de degré inférieur ou égal à l'entier n. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_n$ des polynômes P de $\mathcal{P}_n$ tels que :

$$P(X) + P(-X) = 0$$

est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.

EXERCICE 2

Sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on définit l'addition de deux suites u et v par $u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites de Fibonaci qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

EXERCICE 3

1. On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.
   Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectiriels et préciser alors leur dimension.
   $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}$; $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\}$;
   $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$; $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\}$;
   $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$; $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}$.

EXERCICE 4

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$E_1 = \{f \in E \mid f^2 = f'\}$; $E_2 = \{f \in E \mid f(x) = xf'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$.

EXERCICE 5

I) Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

a) $u = (1, 2, -1);\ v = (1, 0, 1);\ w = (-1, 2, -3)$

b) $u = (-1, 2, 5);\ v = (2, 3, 4);\ w = (7, 0, -7)$.

II) Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

a) $u = (7, 12);\ v = (18, -13);\ w = (-4, 17)$

b) $u = (-1, 0, 2);\ v = (1, 3, 1);\ w = (0, 1, -1)$

c) $u = (15, -27, -6, 12);\ v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

III) Déterminer tous les vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que le système suivant soit libre :

$$\{(1, 0, 0);\ (0, 1, 1);\ (x, y, z)\}$$

.

IV) A partir du système libre $\{e_1, ..., e_n\}$ d'un espace vectoriel E,
on construit les vecteurs :

$\epsilon_j = e_1+e_2+...+e_j$ *pour* $j = 1, 2, ..., n$. *Montrer que* $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ *est aussi un système libre.*

V) Si $b_1 = (1, 1, 1; 1);\ b_2 = (1, 1, -1, -1);\ b_3 = (1, -1, 1, -1);\ b_4 = (1, -1, -1, 1)$ constitient une base de $\mathbb{R}^4$,

déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 2, 1, 1)$ *dans cette base.*

VI) Montrer que le sous-ensemble E, ci-après est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
dont on déterminera la dimension et une base.

$$E = \{(\alpha - \beta, 2\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

.

VII) Montrer que les polynômes $P_1,\ P_2,\ P_3$ définis ci-après forment une base
de l'espace vectoriel des polynômes
à une indéterminée X, de degré inférieur ou égal à deux :

$$P_1(X) = X^2;\quad P_2(X) = (X-1)^2;\quad P_3(X) = (X+1)^2.$$

Exprimer les polynômes Q et R suivants dans cette base :

$$Q(X) = 12;\quad R(X) = 3X^2 - 10X + 1.$$

VIII) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et
F l'ensemble des fonctions numériques f définies par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \gamma x + \delta & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}.$$

Exprimer les constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des trois réels $a,\ b,\ c$ pour que F soit un sous-espace vectoriel de E. Déterminer alors la dimension et
une base de F.

IX) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$u = (2, 1, 0);\ v = (-1, 0, 1);\ w = (4, 1, -2)$$

a) Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un élément de F.

b) Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et une base.

c) Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G.

d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base de $F + G$.

X) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les polynômes suivants de l'indéterminée X :

$$P_1(X) = 5+X+X^2+X^3;\ P_2(X) = -1+6X+3X^2+X^3;\ P_3(X) = -16+3X-2X^3;$$

$$P_4(X) = 3+4X+4X^2+X^3;\ P_5(X) = 6+3X+X^2;\ P_6(X) = -3+6X+10X^2+3X^3;$$

$$P_7(X) = 3 - X - 3X^2 - X^3.$$

Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G engendré respectivement par les familles $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et $\{P_5, P_6, P_7\}$, puis des espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$.

XI) Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés par les familles respectives $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$, où :

$$u_1 = (1, 0, 4, 2)\,;\ u_2 = (1, 2, 3, 1)\,;\ u_3 = (1, -2, 5, 3)\,;\ v_1 = (4, 2, 0, 1)\,;\ v_2 = (1, 4, 2, 1)\,.$$

a) Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G.

b) Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 6

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z - 1);\ g(x, y) = (x, y, m) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

EXERCICE 7

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

EXERCICE 8

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective. Donner une base du noyau de f.

EXERCICE 9

Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

a) A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.

b) L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E.

c) Si le produit matriciel $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

d) Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre inversibles, alors leur somme est inversible, avec

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

e) Si A est une matrice inversible, sa transposée admet comme inverse la transposée de A^{-1}.

f) Si $AB = I$, alors A et B sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

g) Deux matrices distinctes ont deux déterminants distincts.

h) Pour tout entier n et toute matrice carrée A : $detA^n = (\det A)^n$.

EXERCICE 10

On considère les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ *et comparer avec* $(A+B)^2$. *Commenter.*

EXERCICE 11

Si M et N sont deux matrices de types respectifs (m,n) et (n,m) telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est idempotente, c'est-à-dire que $P^2 = P$.

En déduire que P est diviseur à droite et à gauche de zéro.

EXERCICE 12

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB, \quad BA, \quad A^2, \quad AC, \quad CA, \quad C^2, \quad BC, \quad CB, \quad B^2.$$

EXERCICE 13

Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\epsilon_1 = (1,0,1)\,; \quad \epsilon_2 = (-1,1,0)\,; \quad \epsilon_3 = (2,1,1)\,.$$

On définit alors l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par les images, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$f(\epsilon_1) = (1,1,1,0)\,; \quad f(\epsilon_2) = (-1,-1,-1,0)\,; \quad f(\epsilon_3) = (0,1,-1,-1)\,.$$

Déterminer la matrice A qui représente f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ et la matrice B lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique.
A-t-on une relation matricielle entre A et B ?

EXERCICE 14

On considère l'homomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z,t) = (x+t, x+y+t, y+z+t)\,.$$

Déterminer la matrice de cette application linéaire lorsque $\mathbb{R}^4$ est muni de la base formée des vecteurs :
$u_1 = (1,1,1,1,)\,;\ u_2 = (1,1,1,0)\,;\ u_3 = (1,1,0,0)\,;\ \ u_4 = (1,0,0,0)$
et $\mathbb{R}^3$ de la base :

$$v_1 = (0,0,1)\,; \quad v_2 = (0,1,1)\,; \quad v_3 = (1,1,1)\,.$$

Déterminer le noyau et l'image (Imf) de f.

EXERCICE 15

I) Les nombres 204, 527 et 255 étant divisibles par 17, démontrer que le déterminant suivant l'est aussi :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

.

II) Calculer les déterminants suivants :

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \triangle_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \text{où } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

III) Exprimer le déterminant d'ordre n suivant en fonction de $\triangle_{n-1}$ et $\triangle_{n-2}$:

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

On en déduira ensuite $\triangle_n - \triangle_{n-1}$, puis $\triangle_n$.

EXERCICE 16

Déterminer le rang des matrices suivantes et inverser celles qui sont inversibles (suivant les valeurs du paramètre réel a).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 17

I) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} 2x - y - z & = & 4 \\ 3x + 4y - 2z & = & 11 \\ 3x - 2y + 4z & = & 11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 3x + y + z & = & 1 \\ x - y + 2z & = & 2 \\ x + 3y - 3z & = & -3 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x + y - 3z & = & 1 \\ 2x + y - 2z & = & 1 \\ x + y + z & = & 3 \\ x + 2y - 3z & = & 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x + y + z + t + u & = & 7 \\ 3x + 2y + z + t - 3u & = & -2 \\ y + 2z + 2t + 6u & = & 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u & = & 12 \end{cases}$

II) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les système suivants :

a) $\begin{cases} 2x + (m-1)\,y - 3mz & = & 2 \\ x - 2\,(m-1)\,y + mz & = & 1 \\ x + (m-1)\,y - 2mz & = & 2m \end{cases}$, b) $\begin{cases} mx + y + t & = & m+1 \\ x + my + z & = & m-1 \\ y + mz + t & = & m+1 \\ x + z + mt & = & m-1 \end{cases}$

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier, Algèbre MPSI, Cours et 700 Exercices Corrigés,
3ème édition, DUNOD

[2] J.-P.Lecoutre, P. Pilibossian, Travaux Dirigés, Algèbre,
2ème édition, DUNOD

[3] J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 1, Algèbre,
3ème édition, DUNOD.

[4] Claude Boy, Alain Nizard, Prépas TD Algèbre, Exercices et corrigés, Armand Colin.

[5] Algèbre linéaire de Prof. Eva Bayer Fluckiger ; Dr. Philippe Chabloz